ANALÓGOVÉ ELEKTRONICKÉ SYSTÉMY

Michal Maheľ

Bratislava
2022

ANALÓGOVÉ ELEKTRONICKÉ SYSTÉMY

Autor:
Michal Maheľ
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra experimentálnej fyziky

Vydavateľ:
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Knižničné a edičné centrum
Bratislava 2022
1. vydanie

ISBN:
978-80-8147-117-9

PREDSLOV

Tento učebný text má slúžiť ako pomôcka pri štúdiu elektroniky pre študentov experimentálnej fyziky. V žiadnom prípade nemáme ambíciu obsiahnúť problematiku elektroniky v celej šírke, ani do hĺbky odpovedajúcej inžinierskemu štúdiu. Pre každú oblasť elektroniky existuje nepreberné množstvo dostupnej literatúry. V tomto texte sme sa zamerali na analógovú elektroniku - systémy (so sústredenými parametrami) spracúvajúce analógový (nízkofrekvenčný) signál. Dôraz pritom kladieme na teóriu lineárnej odozvy systémov. Našou snahou je poskytnúť fyzikálny vhľad do problematiky, a tiež ukázať, že matematická reprezentácia analógových signálov a systémov, ako aj ich vzájomnej interakcie, je analogická opisu fyzikálnych procesov v rozličných oblastiach fyziky (kvantová mechanika, fyzika materiálov, štatistická fyzika,...), a v širšom kontexte je použiteľná aj na zložitejšie "analógové" systémy (biologické, ekonomické, a pod.).

V prvej časti prezentujeme základné metódy matematického opisu elektronických signálov (2. kapitola), s dôrazom na fourierovskú reprezentáciu. Čitateľovi neunikne ídeová zhoda s vlnovým formalizmom kvantovej mechaniky. V rovnakom duchu parametrizujeme systémy (3. kapitola) interagujúce so signálmi (pri takomto opise pritom vôbec nemusí ísť o systémy elektronické, ba ani fyzikálne). 4. kapitola je venovaná analýze najjednoduchších lineárnych elektronických systémov. Stochastickým (náhodným) signálom a metódam opisu ich interakcie so systémami je venovaná 5. kapitola. Posledná 6. kapitola obsahuje návody na analýzu vlastností (lineárnych) elektronických obvodov. Niektoré témy sú v záujme kontinuity hlavného textu presunuté do Dodatkov.

Výskyt chýb či nejasných formulácií nie je vylúčený, za čo sa čitateľovi ospravedlňujem. Taktiež uvítam konštruktívnu kritiku a návrhy na vylepšenie textu.

Autor

Obsah

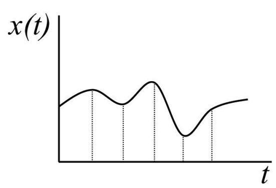
1. ZÁKLADNÉ POJMY

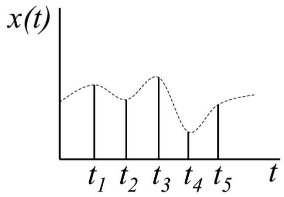
1.1 SIGNÁL

Signál je fyzikálny jav, ktorý je *z hľadiska pozorovateľa* nositeľom *informácie.* V elektronike má signál spravidla podobu elektrického napätia alebo prúdu (v širšom fyzikálnom kontexte môže ísť o ľubovoľnú veličinu). Matematickou reprezentáciou signálu je funkčná závislosť jednej veličiny (*závislej* premennej) od inej veličiny alebo viacerých veličín (*nezávislých* premenných).

Pre **analógový** signál nadobúda *závislá* premenná hodnoty zo *spojitého* intervalu funkčných hodnôt. Pre **digitálny** signál nadobúda *závislá* premenná len určité *diskrétne* hodnoty, resp. hodnoty z určitých úzkych (spojitých) intervalov, odpovedajúce príslušným číselným kódom (spravidla 0 alebo 1 v binárnej sústave). (V ďalšom texte budeme pracovať výlučne s *analógovým* signálom ako funkciou *jednej* nezávislej premennej - *času.*)

Analógové signály možno ďalej rozdeliť na **spojité** - definované na spojitom intervale nezávislej premennej (napr. v ľubovoľnom čase), a **diskrétne** - definované len pre určité *diskrétne* hodnoty nezávislej premennej (napr. pre určité časové okamihy $t_0, t_1, t_2, ...$). Diskrétnosť analógového signálu vyplýva buď z charakreru samotného signálu (jav nastávajúci len pri istých hodnotách nezávislej premennej), alebo z charakteru merania - hodnota závislej premennej je **vzorkovaná** (snímaná) len pri istých hodnotách nezávislej premennej (zväčša diskrétne signály vzniknuté vzorkovaním periodicky v časových okamihoch $t_k = t_0 + k\Theta$, Θ - vzorkovacia perióda, k - celé č.).





Signály rozdeľujeme aj z hľadiska ich matematickej reprezentácie: **Deterministickým** nazývame signál, ktorý je možné reprezentovať *analytickou funkciou* na základe deterministického modelu vzniku signálu (napr. časový priebeh harmonicky oscilujúcej veličiny). Opakom je **náhodný** (**stochastický**) signál, ktorý je produktom náhodného procesu a nemožno ho vyjadriť v konkrétnej matematickej forme.

1.2 SYSTÉM

Elektronické súčiastky a obvody z nich tvorené predstavujú **systém**, ktorý sa podieľa na *tvorbe, spracovaní a prenose signálu.*

Podľa počtu svoriek systému hovoríme o n-**póloch** (n svoriek) alebo o n-**bránach** (n *dvojíc* svoriek). Jednotlivé dvojice svoriek definujeme ako *vstupné/výstupné*. Vstupu (resp. vstupom) a výstupu (resp. výstupom) systému pridružujeme pojmy **vstupný signál** $x_1(t), x_2(t), ...x_m(t)$ a **výstupný signál** $y_1(t), y_2(t), ...y_m(t)$, kde $x_k(t), y_k(t)$ sú signály na k-tom vstupe, resp. výstupe.

Podľa charatkeru *analógových* signálov rozlišujeme
- **spojitý analógový systém** - vstupný aj výstupný signál *spojité*
- **diskrétny analógový systém** - vstupný aj výstupný signál *diskrétne*
- **hybridný analógový systém** - *rôzny* charakter vstupńého a výstupného signálu

Z hľadiska rozmerov analógového systému (d) v porovnaní s vlnovými dĺžkami signálov (λ) rozlišujeme **systémy so sústredenými** ($d \ll \lambda$)alebo **rozloženými** ($d > \lambda$) **parametrami**.

Pre analýzu elektrických systémov so *sústredenými* parametrami využívame *Kirchhoffove zákony*. Pri matematickom opise zložitejších systémov využívame možnosť rozdeliť ich na jednoduchšie podsystémy, ktoré reprezentujeme idealizovanými prvkami (v elektrických systémoch napr. ideálnymi R, L, C), ktorých charakter sa dá vyjadriť v prípade *spojitých* systémov *diferenciálnymi rovnicami*, a v prípade *diskrétnych* systémov *diferenčnými rovnicami*

$$\frac{dy}{dt} \to \frac{y(k)-y(k-1)}{\tau} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \to \frac{\frac{y(k)-y(k-1)}{\tau} - \frac{y(k-1)-y(k-2)}{\tau}}{\tau} = \frac{y(k)-2y(k-1)+y(k-2)}{\tau^2}$$

$$x = \int y dt \to x(k) = x(k-1) + \frac{\tau}{2}[y(k) + y(k-1)]$$

• Linearita

Systém nazývame lineárnym, ak vlastnosti výstupného signálu sú určené vstupným signálom a **operátorom lineárneho systému** $\hat{T}$

$$y(t) = \hat{T}x(t)$$

Naopak, pre nelineárny systém platí

$$y(t) = \hat{T}_1 x(t) + \hat{T}_2 x^2(t) + ...$$

Najjednoduchším prípadom lineárneho systému je ideálny lineárny rezistor, ktorého operátorom, ak za vstupný signál budeme považovať napätie $\mathcal{U}(t)$ a za výstupný signál prúd $\mathcal{I}(t)$, je jeho vodivosť G

$$\mathcal{I}(t) = G\mathcal{U}(t)$$

V prípade nelineárneho rezistora dostávame nelineárnu voltampérovú charakteristiku (VACH)

$$\mathcal{I}(t) = G_1\mathcal{U}(t) + G_2\mathcal{U}^2(t)...$$

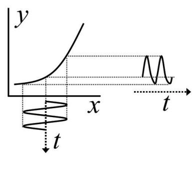
kde $G_1 = \frac{d\mathcal{I}}{d\mathcal{U}}$ predstavuje **dynamickú**, resp. **diferenciálnu vodivosť**, ktorá je *rôzna* od jeho **statickej vodivosti** $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{U}}$ v danom bode VACH - **pracovnom bode**.

Linearita systému v sebe zahrňuje dve vlastnosti: **homogenitu** a **princíp superpozície**

$$\hat{T}[\alpha x(t)] = \alpha\hat{T}x(t) \qquad \hat{T}[x_1(t) + x_2(t)] = \hat{T}x_1(t) + \hat{T}x_2(t)$$

ktoré sú pre nelineárne systémy narušené.

Ak vstupný signál nelineárneho systému je $x(t) = x_0 + A\cos\omega t$, výstupný signál obsahuje fourierovské spektrum vyšších harmonických $y(t) = f(x_0 + A\cos\omega t) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$.



Systém nelineárny do 2. stupňa (nelinearita je aproximovaná polynómom 2. stupňa) pre *biharmonický* vstupný signál $x(t) = x_0 + A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$ dáva výstupný signál obsahujúci frekvencie $\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$, pre nelinearitu do 3. stupňa výstupný signál obsahuje *navyše* frekvencie $3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1$.

Vo všeobecnosti výstupný signál *navyše* obsahuje **kombinačné frekvencie**

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + ... + n_k\omega_k + ...$$

kde n_k je *kladné i záporné* celé číslo, a ω_k sú frekvencie obsiahnuté v spektre $x(t)$.

V reálnych systémoch je ich linearita len *idealizáciou*, vhodnou len v *obmedzenom* rozsahu.

- **Zotrvačnosť**

Ak systém obsahuje *pamäťový prvok* (tj. prvok akumulujúci energiu), okamžitý výstupný signál závisí aj od *histórie* systému

$$y(t) = \hat{T}x(t-\tau)$$

- **Aktívnosť/pasívnosť**

Systém je **aktívny**, ak výstupný signál je *energeticky "obohatený"* oproti vstupnému signálu. Opakom je **pasívny** systém.

- **Stabilita**

Systém je **stabilný**, ak výstupný signál nenarastá neobmedzene

$$|y(t)| < \infty \text{ ak } |x(t)| < \infty$$

- **Stacionarita**

Systém je **stacionárny**, ak jeho vlastnosti nezávisia od času ($\hat{T} \neq \hat{T}(t)$ pre lineárny systém).

- **Kauzalita**

Systém je **kauzálny**, ak aktuálny výstupný signál systému nezávisí od *budúceho* vstupného signálu

$$y(t) \neq \hat{T}x(t+\tau)$$

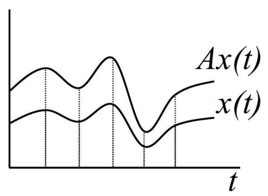
Každý reálny systém je kauzálny (veríme v kauzálny fyzikálny svet).

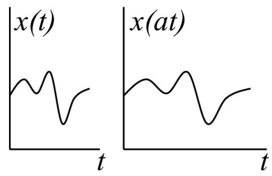
2. MATEMATICKÁ REPREZENTÁCIA DETERMINISTICKÉHO SIGNÁLU

2.1 ZÁKLADNÉ SIGNÁLY

2.1.1 Základné operácie so signálmi

Zosilnenie $x(t) \to Ax(t)$ pre spojitý signál
$x(k) \to Ax(k)$ pre diskrétny signál $(x(k) = x(t = t_k))$

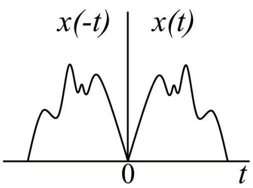


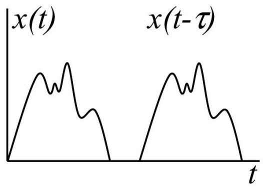


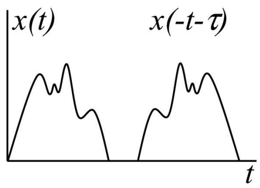
Škálovanie $x(t) \to x(at)$ pre spojitý signál (a - reálne č.)
signál

Odraz $x(t) \to x(-t)$ resp. $x(k) \to x(-k)$

Posun $x(t) \to x(t-\tau)$ pre spojitý signál (τ - reálne č.)
$x(k) \to x(k-N)$ pre diskrétny signál (N - celé č.)



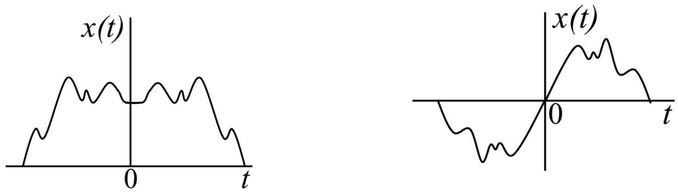




Sčítanie a odčítanie $ax_1(t) \pm bx_2(t)$ pre spojitý signál (a, b - reálne č.)
$ax_1(k) \pm bx_2(k)$ pre diskrétny signál (len pre *rovnaké* k !)

2.1.2 Dôležité vlastnosti signálov

Párny a **nepárny** signál $x(-t) = \pm x(t)$ resp. $x(-k) = \pm x(k)$



Platí identita $\qquad x(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} + \frac{x(t)-x(-t)}{2}$

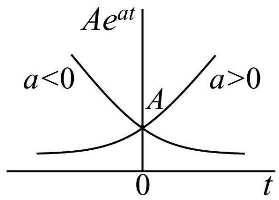
Ľubovoľný signál je súčtom párneho a nepárneho signálu.

Periodicita $\qquad x(t+T) = x(t) \qquad$ pre všetky t

$x(k+N) = x(k) \qquad$ pre všetky k (N - celé č.)

2.1.3 Základné signály

Exponenciálny signál



$x(t) = Ae^{at} \qquad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \sim x(t)$

$x(k) = Ae^{ak\Theta} = A(e^{a\Theta})^k = AC^k$

$x(k+1) = AC^{k+1} = AC^kC = Cx(k)$

$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k) = (C-1)x(k) = C'x(k) \ \sim x(k)$

Daná hodnota je násobenie predchádzajúcej hodnoty konštantou (geometrický nárast).

Sinusoidálny signál $\qquad x(t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t = A \sin \omega t \qquad$ pre spojitý signál

Po posune v čase $\qquad x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi$

Súčet sinusoidálnych signálov *rovnakej frekvencie*, ľubovoľných amplitúd a fáz je tiež sinusoidálnym signálom.

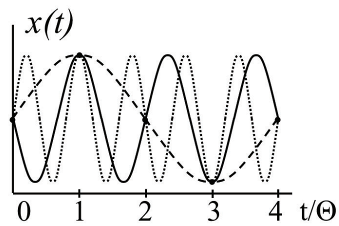
Pre diskrétny (vzorkovaný) signál $\qquad x(k) = A\sin(\omega k\Theta + \phi)$

Aby sa aj po vzorkovaní pôvodného signálu zachoval jeho periodický charakter, je vhodné ak vzorkovacia perióda Θ spĺňa podmienku $m\Theta = \frac{2\pi}{\omega}$, m - celé č.

Identita $A\sin[k(\omega\Theta) + \phi] = A\sin[k(\omega\Theta + 2\pi l) + \phi]$, l - celé č., však vedie na nejednoznačnosť pri *rekonštrukcii* spojitého signálu zo vzorkovania - nedá sa rozlíšiť, či pôvodný signál mal frekvenciu ω alebo $\omega \pm l\frac{2\pi}{\Theta}$.
Uvedený jav sa nazýva **aliasing**.

Obr.: Rovnaké vzorkované hodnoty $x(t)$ pre

$$\frac{2\pi}{\omega\Theta} = \frac{1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{4}$$



Kvôli zamedzeniu aliasingu je potrebné, aby $\omega\Theta < \pi$ (tj. vzorkovacia frekvencia je najmenej 2ω).

Komplexný exponenciálny signál $\qquad \tilde{x}(t) = A\exp\{\pm i(\omega t + \varphi)\}$

$$\tilde{x}(k) = A\exp\{\pm i(k\omega\Theta + \varphi)\}$$

Reálny (fyzikálny) signál $\qquad x(k) = Re\{\tilde{x}(t)\} = A\cos[\pm(\omega t + \varphi)]$

Keďže cos je *párna* funkcia, voľba znamienka ($\pm$) nemá vplyv na reálny signál, prejaví sa však vo formálnom zápise v mnohých vzorcoch.

Pozn.
Vo *fyzikálnych* textoch sa komplexná harmonická funkcia času obvykle zapisuje v tvare $\exp\{-i\omega t\}$ ("konvencia F"), v *elektrotechnických* textoch je to naopak $\exp\{i\omega t\}$. ("Konvencia E", väčšinou s j namiesto i.)
Všetky odvodenia v tomto texte používajú konvenciu E, pri dôležitých, resp. často používaných vzorcoch je pridaná aj konvencia F.

Jednotkový skok (Heavisideova funkcia)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$ nedefinovaná pre $t = 0$

$$u(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

Jednotkový impulz (Diracova funkcia)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

$$u(k) - u(k-1) = \delta(k) \qquad u(k) = \sum_{l=-\infty}^{k} \delta(l)$$

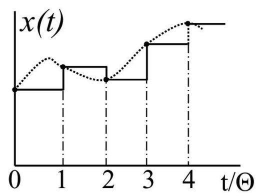
Vyjadrenie signálu pomocou jednotkového skoku

$x(k\Theta) = x_k$, $k = 0, 1, 2...$ $\qquad (x(t) = 0$ pre $t < 0)$

$$x(t) \cong x_0 u(t) + (x_1 - x_0)u(t - \Theta) + (x_2 - x_1)u(t - 2\Theta) + ...$$
$$= x_0 u(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_{k-1})u(t - k\Theta)$$

$\Theta \to 0 :$ $\quad k\Theta \to \tau$, $\quad (x_k - x_{k-1}) \to \frac{dx}{d\tau}d\tau$

$$\underline{\underline{x(t) = x_0 u(t) + \int_0^{\infty} \frac{dx}{d\tau} u(t - \tau)d\tau}}$$



Vyjadrenie signálu pomocou jednotkového impulzu

$$\underline{\underline{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau}} \qquad \underline{x(k_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(k_0 - k)}$$

δ-funkcia "vylúpne" z $x(\tau)$ hodnotu $x(\tau = t)$.

2.2 FOURIEROVSKÁ REPREZENTÁCIA SPOJITÉHO SIGNÁLU

2.2.1 Vektorová reprezentácia signálov a energia signálov

Množina signálov $x_i(t)$ tvorí *lineárny priestor* $\mathcal{M}$, ak:
- $\forall x_i, x_j \in \mathcal{M}$ platí $x_i + x_j = x_k \in \mathcal{M}$ (táto operácia je komutatívna a asociatívna)
- $\forall x_i \in \mathcal{M}$ platí $ax_i \in \mathcal{M}$
- $\exists \emptyset \in \mathcal{M}$ pre ktoré $x_i + \emptyset = x_i$, $x_i \in \mathcal{M}$

V takomto priestore možno definovať sústavu *lineárne nezávislých* **bázových vektorov** e_i ($\sum_i \alpha_i e_i = \emptyset$ len ak všetky $\alpha_i = 0$), a ľubovoľný signál $x(t) \in \mathcal{M}$ možno vyjadriť v tvare $x(t) = \sum_i c_i e_i$, kde c_i sú *priemety* signálu do smerov e_i. Na počet bázových vektorov pritom nie sú kladené obmedzenia.

Analógom dĺžky vektora v euklidovskom priestore je **norma signálu** $\|x\|$, pre ktorú platí:
- $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ len ak $x = \emptyset$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x_i + x_j\| \leq \|x_i\| + \|x_j\|$
- $\underline{\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dt} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} xx^* dt}}$

Norma signálu fyzikálne úzko súvisí s *energiou* prenášanou signálom, preto môžme **energiu signálu** definovať ako $\underline{E = \|x(t)\|^2}$

(Ide o *zovšeobecnenú* energiu, tj. jej fyzikálnym rozmerom je kvadrát rozmeru signálu, nie joule! Vynásobením príslušným rozmerovým koeficientom dostaneme energiu v jouloch.) Samotný pojem energie signálu (v zmysle tejto definície) má zmysel len pre kvadraticky integrovateľný signál (tj. ohraničená veľkosť signálu po ohraničenú dobu trvania).

Pre energiu *súčtu* 2 signálov môžeme písať

$$E = \|x_1 + x_2\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dt$$

Prvé dva členy reprezentujú energiu *jednotlivých* signálov, a tretí člen má význam **vzájomnej** (interakčnej) **energie signálov** (energia nie je aditívna veličina).

V analógii s vektorovou identitou $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a} \cdot \vec{b}|$, kde $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\vartheta$ je *skalárny súčin vektorov* a ϑ je uhol medzi nimi, definujeme v priestore signálov **skalárny súčin signálov**

$$\underline{[x_1, x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt \quad \text{resp.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt}$$

fyzikálne vyjadrujúci energetickú interakciu signálov.

Vlastná energia signálu $x(t)$ je teda $[x, x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dt$ resp. $\int_{-\infty}^{\infty} xx^* dt$

V euklidovskom priestore sa *ortogonálnosť* 2 vektorov ($\vartheta = 90°$) dá vyjadriť podmienkou $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, **ortogonálnosť signálov** definujeme analogicky, $[x_1, x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt = 0$

Ak bázové vektory e_i spĺňajú podmienky ortogonálnosti a *normovanosti* na intervale $\langle t_1, t_2 \rangle$ (konečnom alebo nekonečnom)

$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e_i e_j dt = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ hovoríme o **ortonormovanej báze** signálov.

2.2.2 Zovšeobecnený Fourierov rad

Ľubovoľný signál $x(t)$ vyjadrený pomocou vybranej nekonečnej *ortonormovanej bázy* $e_k(t)$ (definovanej v časovom intervale (t_1, t_2)) sa nazýva **zovšeobecneným Fourierovým ra-**

dom (ZFR)

$$\underline{x(t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(t)}$$

Koeficienty c_k sú dané podmienkou ortonormovanosti

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} x e_k dt = \frac{1}{t_2-t_1}\sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_{t_1}^{t_2} e_k e_m dt = c_k$$

a teda $\underline{c_k = \frac{1}{t_2-t_1}[x, e_k]}$

Dosadením ZFR do $E=[x,x]$ dostávame výraz pre energiu signálu $\underline{E=(t_2-t_1)\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2}$

2.2.3 Fourierov rad

Ľubovoľný *periodický* signál s periódou $T=\frac{2\pi}{\omega}$ možno vyjadriť v tvare **Fourierovho radu** (FR)

$$\underline{\underline{x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\omega t+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t}}$$

$$\underline{\underline{a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos k\omega t dt}} \qquad \underline{\underline{b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin k\omega t dt}}$$

FR je špeciálnym prípadom ZFR pre *periodický* signál, pričom bázu $e_k(t)$ tvoria *harmonické* funkcie $\cos k\omega t$, $\sin k\omega t$ splňujúce podmienky ortonormovanosti

$$\tfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos k\omega t\cos m\omega t dt \ , \ \tfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin k\omega t\sin m\omega t dt = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k\neq m \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos k\omega t \sin m\omega t dt = 0$$

Ak $x(t)$ je *párne*, $b_k=0$ ak $x(t+T/2)=x(t)$ - len *párne* harmonické
Ak $x(t)$ je *nepárne*, $a_k=0$ ak $x(t+T/2)=-x(t)$ - len *nepárne* harmonické

Stredný výkon periodického signálu (za periódu) $\underline{\bar{\mathcal{P}}=\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = ... = \frac{a_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}}$

Parsevalova teoréma

Pomocou identít $\cos k\omega t = \frac{e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}}{2}$ a $\sin k\omega t=\frac{e^{ik\omega t}-e^{-ik\omega t}}{2i}$ možno FR vyjadriť v tvare

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ik\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ik\omega t} = c_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-ik\omega t}$$

Keďže $\sin(-k\omega t)=-\sin(k\omega t)$ a $c_k^*=c_{-k}$, platí (E)

($x(t)$ je *reálna* funkcia, c_k komplexné)

$$\underline{\underline{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}}} \qquad \text{(E)}$$

$$\underline{\underline{c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-ik\omega t}dt}}$$

Zámenou c_k a c_k^* (koeficient c_k pri $e^{-ik\omega t}$) dostaneme

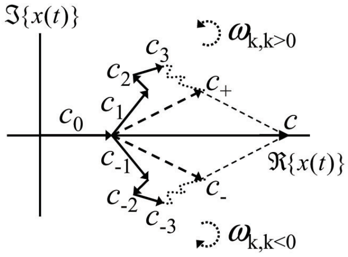
$$\underline{\underline{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega t}}} \qquad \text{(F)}$$

$$\underline{\underline{c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{ik\omega t}dt}}$$

Stredný výkon signálu je $\underline{\bar{\mathcal{P}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2}$

Pozn.: Existencia *záporných* frekvencií $k\omega$ pre $k<0$ nenarúša fyzikálny zmysel FR - členy s k a $-k$ vystupujú v pároch a dohromady dávajú *reálne* číslo.

Jednotlivé zložky FR $c_k e^{ik\omega t}$ *rotujú* v komplexnej rovine s frekvenciami $k\omega$ (*ľavotočivo* pre $k > 0$ a *pravotočivo* pre $k < 0$).
Výsledný signál (v každom okamihu vznikne zložením jednotlivých zložiek) sa teda *mení v čase*, vždy však leží na *reálnej* osi.



2.2.4 Fourierova transformácia

Ľubovoľný *neperiodický* signál konečného trvania možno transformovať na *periodický* jednoduchým *nekonečným opakovaním* tohto signálu s periódou T - takýto signál potom možno vyjadriť pomocou FR.
Ak sa signál opakuje s periódou $T \to \infty$, odpovedá to nezmenenému pôvodnému signálu - treba teda vyjadriť FR v limite $T \to \infty$:
- koeficienty $c_k \to 0$
- odstup spektrálnych zložiek $\Delta\omega = k\omega - (k-1)\omega = \omega = \frac{2\pi}{T} \to 0$, ω sa teda stáva *spojitou* premennou
- pre pomer $\frac{c_k}{\Delta\omega} = c(\omega)$ (čo je limita $\frac{0}{0}$ - nenulové konečné č.) platí (v konvencii E)

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\omega t}dt \quad \xrightarrow[T\to\infty]{} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

- definujeme funkciu $\quad X(\omega) = 2\pi c(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\omega t}dt \xrightarrow[T\to\infty]{} \underline{= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt}$

- FR prejde na tvar $\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{ik\omega t}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{ik\omega t}\Delta\omega$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \qquad \underline{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega}$$

Fyzikálny význam veličiny $X(\omega)$ je **spektrálna hustota amplitúdy** signálu - spektrálny interval $d\omega$ prispieva k amplitúde signálu dielom $X(\omega)d\omega$.

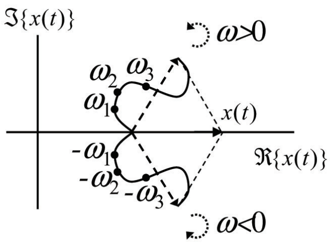
Transformácia $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ sa nazýva **Fourierovou transformáciou** (FT) a je daná vzťahmi $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \text{(E)}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t}dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad \text{(F)}$$

Výsledný signál v každom okamihu vznikne zložením rotujúcich *infinitezimálnych* zložiek).

Dĺžka intervalu $\Delta\omega$ na krivkách je úmerná $X(\omega)$.



Pozn. 1
Koeficient $\frac{1}{2\pi}$ vo FT je vecou konvencie a súvisí s výberom definície funkcie $X(\omega)$ (v našom prípade $X(\omega) = 2\pi c(\omega)$).

Pozn. 2
Spektrálna analýza generovaná obvyklým softvérom (v prístrojoch a pod.) *neodpovedá* takejto definícii FT - spravidla sa realizuje tak, že reálny signál sa rozdelí do malých časových

úsekov T, a *každý z nich* sa počíta ako *nekonečne sa opakujúca* sekvencia (s periódou T) - výsledkom takejto analýzy je potom fourierovské spektrum *závislé od času* (po krokoch T). Pre experimentátora je to informácia o *vývoji* spektrálneho zloženia signálu v čase.

Rigorózna FT pracuje v limite $T \to \infty$ (čo je experimentálne *nerealizovateľné*), a teda fourierovské spektrum *nezávisí od času*.

2.2.5 Vlastnosti FT

Ak $x(t)$ je *párne* $\quad X(\omega) = 2\int_0^\infty x(t)\cos\omega t dt$

Ak $x(t)$ je *nepárne* $\quad X(\omega) = -2i\int_0^\infty x(t)\sin\omega t dt$

Ľubovoľná funkcia je súčtom párnej a nepárnej funkcie

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t dt - i\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

Fázové spektrum $X(\omega)$ je $\varphi = \arctan\left\{\frac{\text{nepárna imaginárna časť}}{\text{párna reálna časť}}\right\}$ je *vždy nepárne*

Amplitúdové spektrum $X(\omega)$ je

$$|X(\omega)| = \sqrt{(\text{párna reálna časť})^2 + (\text{nepárna imaginárna časť})^2}$$

a je *vždy párne*.

$$X(-\omega) = -X(\omega) \qquad |X(-\omega)| = |X(\omega)| \qquad \underline{X(-\omega) = X^*(\omega)}$$

$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$ - FT je *lineárna*

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-i\frac{\omega}{a}(at)}d(at) = \underline{\frac{1}{a}X(\frac{\omega}{a})}$$

$$x(t-\tau) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}d(t-\tau) = \underline{X(\omega)e^{-i\omega\tau}}$$

amplitúda sa nemení, fáza sa posúva o $\omega\tau$

$$x(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow \underline{X(\omega-\omega_0)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-i\omega t}dt = [x(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} + \underline{i\omega\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt} \qquad (x(t) \xrightarrow[T\to\pm\infty]{} 0)$$

pre integrovateľný signál

$\frac{dx^n(t)}{dt^n} \leftrightarrow \underline{(i\omega)^n X(\omega)}$ $\quad i\omega$ - *operátor derivovania*

$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \leftrightarrow \underline{\frac{1}{i\omega}X(\omega)}$ $\quad \frac{1}{i\omega}$ - *operátor integrovania*

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega\right\}e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-i(\omega-\Omega)t}dt\right\}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Omega)X_1(\omega-\Omega)d\Omega}_{\textbf{konvolúcia}}$$

$$\underline{x_1(t)x_2(t)} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Omega)X_1(\omega-\Omega)d\Omega = \frac{1}{2\pi}X_2(\omega) * X_1(\omega) = \underline{\frac{1}{2\pi}\overbrace{X_1(\omega) * X_2(\omega)}}$$

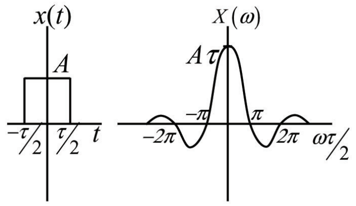
$$\underline{X_1(\omega)X_2(\omega) \leftrightarrow x_1(t) * x_2(t)}$$

Súčin dvoch funkcií prechádza pri FT alebo spätnej FT na konvolúciu, a naopak.

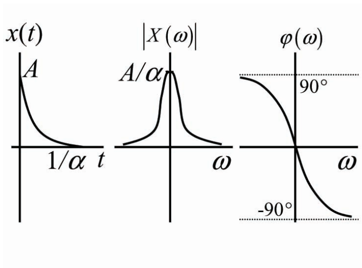
Pozn.
Prechodom z konvencie E do F sa vo všetkých uvedených výrazoch i zmení na $-i$ a naopak.

2.2.6 FT dôležitých signálov

Pravouhlý pulz $x(t) = A$ pre $t \in (-\tau/2, \tau/2)$



$$X(\omega) = A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t}dt = A\int_{-\tau/2}^{\tau/2}[\cos\omega t - i\sin\omega t]dt =$$
$$= 2A\int_0^{\tau/2}\cos\omega t dt + 0 = \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} = \underline{A\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}}$$



Exponenciálny pulz $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$

$$X(\omega) = A\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t}dt = \frac{-A}{\alpha+i\omega}[e^{-(\alpha+i\omega)t}]_0^{\infty} = \underline{\frac{A}{\alpha+i\omega}}$$

$X(\omega) = |X(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$

$|X(\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$ $\qquad\qquad$ $\varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\alpha}$

Gaussovský pulz $x(t) = Ae^{-\beta t^2}$

$X(\omega) = \underline{A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/4\beta}}$ $\qquad$ fourierovský *obraz* gaussovského pulzu je gaussovský pulz

δ-funkcia $x(t) = A\delta(t)$

$X(\omega) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\delta(t)dt = \underline{A}$ $\qquad$ *rovnomerne* zastúpené *všetky* frekvencie

Čím kratší je pulz, tým širšie je frekvenčné spektrum. Napr. pre pravouhlý pulz je podstatná časť energie signálu sústredená v intervale $\omega\tau/2 < \pi$ (princíp neurčitosti).

Neintegrovateľné signály (podmienka integrovateľnosti $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < +\infty$) :

Konštantný signál

$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ $\qquad$ a teda $\qquad$ $X(\omega) = \underline{2\pi A\delta(\omega)}$

Sinusoidálny signál

$e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ $\qquad$ a teda $\qquad$ $X(\omega) = \underline{2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$

$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}$ $\qquad \leftrightarrow \qquad$ $X(\omega) = \underline{-i\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]}$

$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}$ $\qquad \leftrightarrow \qquad$ $X(\omega) = \underline{\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]}$

Ľubovoľná periodická funkcia

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$ (FR) $\quad$ a teda $\qquad$ $X(\omega) = \underline{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta(\omega-k\omega_0)}$
(spektrum je symetrické okolo 0)

Jednotkový skok

$u(t) = \lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha t}$, $t > 0$ $\qquad$ $u(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha+i\omega} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - \lim_{\alpha\to 0}\frac{i\omega}{\alpha^2+\omega^2}$

Prvý člen je lorentzovskou reprezentáciou δ-funkcie, jej váhu možno vypočítať integrovaním $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1+(\omega/\alpha)^2} = \pi$ pre $\omega \neq 0$, a teda $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} = \pi\delta(\omega)$

Druhý člen $\lim_{\alpha\to 0} \frac{-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{1}{i\omega}$, a teda $\underline{X(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)}$

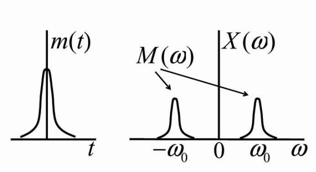
Rádioimpulz

$x(t) = \underbrace{m(t)}\underbrace{\cos(\omega_0 t + \vartheta)}$ $\qquad m(t) \leftrightarrow M(\omega)$ - známe

súčin originálov $\leftrightarrow$ konvolúcia obrazov

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} M(\omega - \Omega)\left\{\delta(\Omega-\omega_0)e^{i\vartheta} + \delta(\Omega+\omega_0)e^{-i\vartheta}\right\} d\Omega =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left\{e^{i\vartheta}M(\omega-\omega_0) + e^{-i\vartheta}M(\omega+\omega_0)\right\}}$$



2.2.7 Energetické spektrá signálov

Skalárny súčin 2 *rôznych* signálov je

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega}_{x_2(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{i\omega t}dt}_{X_1(-\omega)}\, d\omega$$

$X(-\omega) = X^*(\omega)$

$$\underline{\underline{[x_1(t), x_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega}} \qquad \textbf{Rayleighov vzťah}$$

skalárny súčin 2 signálov = $\frac{1}{2\pi}$ skalárny súčin ich spektrálnych hustôt

Pozn.: Súčin $X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ je vo všeobecnosti *komplexný*, integrál so *symetrickými* hranicami integrovania ($\int_{-a}^{a}$) je tvorený navzájom komplexne združenými dvojicami $X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ a $X_1(-\omega)X_2^*(-\omega) = X_1^*(\omega)X_2(\omega) = [X_1(\omega)X_2^*(\omega)]^*$, pričom platí $z + z^* = 2\Re\{z\}$.

Pre *energiu* signálu platí $\qquad \underline{E_1 = \int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega}$

(pulz konečnej dĺžky trvania) $\qquad$ (skalárny súčin $[x(t), x(t)]$)

$|X(\omega)|^2 = W_1(\omega)$ - **spektrálna hustota energie** (**energetické spektrum**)

Celková energia signálu je daná súčtom vkladov všetkých frekvencií.

Energia v intervale $\Delta\omega$ okolo ω je $\Delta E_1 = \frac{1}{\pi}W_1(\omega)\Delta\omega$ $\quad$ ($\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_1(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} W_1(\omega)d\omega$)

(fyzikálny zmysel majú len $\omega \geq 0$)

$\Re\{X_1(\omega)X_2^*(\omega)\} = W_{12}$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega)d\omega$

W_{12} - spektrálna hustota *vzájomnej* energie (**vzájomné energetické spektrum**)

2.2.8 Korelácia signálov

Autokorekačná funkcia $\qquad \underline{K_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt}$

Pre $\tau = 0$ je $K_1(0) = E_1$ $\qquad$ pre $\tau > 0$ je $|K_1(\tau)| \leq K_1(0) = E_1$ (ako skalárny súčin)

Autokorelačná funkcia je definovaná ako *konvolúcia* signálu so sebou samým - je teda (integrálnou) mierou súvisu - *korelácie* - signálu v jednom čase so sebou samým v lubovoľnom inom čase. Pokiaľ má signál prísne deterministický charakter a jeho hodnoty v rôznych časoch sú jasne korelované, nenulové príspevky "pribúdajú" do konvolučného integrálu po celú dobu jeho trvania - hodnota autokotelačnej funkcie je v takomto prípade mierou dĺžky trvania signálu. (V prípade prísne stochastického signálu neexistuje žiaden súvis (korelácia) medzi hodnotami signálu ani v dvoch tesne po sebe idúcich okamohoch. V tomto prípade má autokorelačná funkcia podobu δ-funkcie - hovoríme o δ-*korelácii.*)

$K_1(\tau)$ je *symetrická* okolo $\tau = 0$, s centrálnym maximom pri $\tau = 0$, $|K_1(\tau)|$ monotónne klesá alebo tlmene osciluje, $K_1(-\tau) = K_1(\tau)$.

Keďže $x(t-\tau) \leftrightarrow X(\omega)e^{-i\omega\tau} = X_\tau(\omega)$, z Rayleighovho vzťahu vyplýva
$K_1(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X_\tau^*(\omega)d\omega = \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 e^{i\omega\tau}d\omega}$ $\quad K_1(\tau) \leftrightarrow |X(\omega)|^2 = W_1(\omega)$

$$\underline{W_1(\omega) = |X(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau} \qquad \text{(FT)}$$

Keďže autokorelačná funkcia deterministického signálu je mierou dĺžky jeho trvania, jej súvis s jeho spektrálnou skladbou prostredníctvom FT je prirodzený. (V prípade δ-korelácie stochastického signálu teda očakávame ploché spektrum.)

Vzájomná korelačná funkcia $\quad \underline{K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t-\tau)dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t+\tau)x_2(t)dt$

$$K_{12}(\tau) \neq K_{12}(-\tau) \qquad\qquad K_{12}(\tau) = K_{21}(\tau)$$

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_{2\tau}^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega)d\omega$$

$$K_{12}(\tau) \leftrightarrow W_{12}(\omega)$$

Vzorce poskytujú možnosť nájsť $W_1(\omega)$, $W_{12}(\omega)$ pomocou $K_1(\tau)$, $K_{12}(\tau)$.

2.3 FOURIEROVSKÁ REPREZENTÁCIA DISKRÉTNEHO SIGNÁLU

2.3.1 Fourierov rad

Signál periodický s frekvenciou ω, vzorkovaný s frekvenciou ω_s, $x(n+N) = x(n)$, kde $\frac{\omega}{\omega_s} = \frac{1}{N}$

$$\underline{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ink(2\pi/N)}} \qquad\qquad \underline{c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-ink(2\pi/N)}}$$

Počet harmoník je (na rozdiel od FR spojitej funkcie) *konečný* - limitovaný vzorkovacou frekvenciou.

2.3.2 Diskrétna Fourierovova transformácia

$$\underline{X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)e^{-ink(2\pi/N)}} \qquad\qquad \underline{x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{ink(2\pi/N)}}$$

diskrétna Fourierova transformácia (DFT)

Vlastnosti DFT sú analogické vlastnostiam FT spojitého signálu.

2.4 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA SIGNÁLU

2.4.1 Jednostranná LT

Nevýhodou FT (okrem relatívnej zložitosti) je, že nie je použiteľná pre niektoré prakticky užitočné signály, ktorých integrály nekonvergujú.
Vložením člena $e^{-\sigma t}$ (σ reálne) do integrálu FT možno zabezpečiť jeho konvergenciu

$$X(\sigma,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$s = \sigma + i\omega$ - **komplexná frekvencia**

Výber σ závisí od $x(t)$, integrál však konverguje len pre *určitý interval* σ - tento problém sa redukuje definovaním (tzv. *jednostrannej*) **Laplaceovej transformácie** (LT) $x(t) \leftrightarrow X(s)$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad\qquad x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)e^{st}ds$$

Pre $\sigma = 0$ LT prejde na FT.

Podmienka existencie LT: $\int_0^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$, $(\sigma > 0) \quad \Leftrightarrow \quad |x(t)| < Me^{\alpha t}$ pre všetky t.
Oblasť konvergencie je teda $\alpha < \sigma < \infty$ ($x(t)$ nesmie rásť rýchlejšie než exponenciálne).

Pozn.:
LT je veľmi "obľúbená" v elektrotechnických textoch, uvádzame ju teda len v konvencii E (v konvencii F by sa zmena znamienka vzťahovala len na $i\omega$, nie na σ).

2.4.2 Vlastnosti LT

$u(t-\tau)x(t-\tau) \leftrightarrow X(s)e^{-s\tau}$

$e^{-at}x(t) \leftrightarrow X(s+a)$

$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$

$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$

$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$

$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow [x(t)e^{-s\tau}]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} x(t)e^{-s\tau}dt = sX(s) - x(0)$ ak $x(0) = 0$: $\underline{\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)}$

$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\frac{dx(0)}{dt} - \ldots - \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}}$ $\frac{d^{n-k}x(0)}{dt^{n-k}} = 0$: $\underline{\frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX(s)}$

$\underline{\underline{\frac{d}{dt} \leftrightarrow s}}$ s - *operátor derivovania*

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau$ ak $x(t) = 0$ pre $t < 0$: $\underline{\int_0^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)}$

$\underline{\underline{\int_0^t d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}}}$ $\frac{1}{s}$ - *operátor integrovania*

LT transformuje diferenciálne rovnice na *algebrické*.

$tx(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}X(s)$

$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} X(\sigma)d\sigma$

2.4.3 LT niektorých dôležitých funkcií

$\delta(t) \leftrightarrow 1$ $\qquad u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ $\qquad e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$

$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$ $\qquad t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$, n - celé kladné

$$c_1e^{a_2t}+c_2e^{a_2t} \leftrightarrow \tfrac{c_1}{s-a_1}+\tfrac{c_2}{s-a_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\omega t & \leftrightarrow & \frac{\omega}{s^2+\omega^2} & c_1=-c_2=\frac{1}{2i} & a_1=-a_2=i\omega \\ \cos\omega t & \leftrightarrow & \frac{s}{s^2+\omega^2} & c_1=c_2=\frac{1}{2} & a_1=-a_2=i\omega \\ \sinh bt & \leftrightarrow & \frac{b}{s^2-b^2} & c_1=-c_2=\frac{1}{2} & a_1=-a_2=b \\ \cosh bt & \leftrightarrow & \frac{s}{s^2-b^2} & c_1=c_2=\frac{1}{2} & a_1=-a_2=b \end{cases}$$

$e^{-at}\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

$e^{-at}\cos\omega t \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ $\qquad$ $e^{-at}t^n \leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ $\quad n$ - celé nezáporné č.

$t\cos\omega t \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ $\qquad$ $t\sin\omega t \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^2+1} = [\arctan\sigma]_s^\infty = -\arctan s$

S využitím vety o LT konvolúcie:

$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \leftrightarrow e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{a(t-\tau)}e^{b\tau}d\tau = e^{at}\int_0^t e^{(b-a)\tau}d\tau = \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ $\quad$ ak $a \neq b$

ak $a=b:$ $\quad e^{at}\int_0^t d\tau = te^{at}$

$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2} \leftrightarrow \frac{\sin\omega t}{\omega} * \frac{\sin\omega t}{\omega} = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\sin\omega\tau d\tau = \frac{1}{2\omega^2}\int_0^t [\cos\omega(t-2\tau)-\cos\omega\tau]d\tau =$

$= \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{sin\omega(t-2\tau)}{-2\omega} - \tau\cos\omega t\right]_0^t = \frac{\sin\omega t}{2\omega^3} - \frac{t\cos\omega t}{2\omega^3}$ $\qquad \omega \neq 0$

Slovník LT s najdôležitejšími výrazmi je v Dodatku A.

Pr.:
Riešenie dif. rovnice s počiatočnými podmienkami

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2x(t)$$

Poč. podmienky: $y(0)=1$, $\frac{dy(0)}{dt}=0$ $\qquad$ Budenie: $x(t)=1$ pre $t \geq 0$ (inak 0)

LT: $\quad [s^2Y(s)-sy(0)]+4[sY(s)-y(0)]+3Y(s)=2X(s)$ $\qquad X(s)=\frac{1}{s}$, $y(0)=1$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+3} + \frac{2}{s(s^2+4s+3)} = \frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+3)} =$$

$$= \frac{2}{s\cdot 1\cdot 3} + \frac{1-4+2}{-1(s+1)(-1+3)} + \frac{9-12+2}{-3(-3+1)(s+3)} = \frac{2/3}{s} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/6}{s+3}$$

Z tabuľky LT: $\quad \frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}$ $\quad \frac{1}{s} \leftrightarrow 1\ (u(t))$

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}}_{\text{prechodové riešenie}} + \frac{2}{3} \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{3}$$

stacionárne riešenie

2.4.4 Diskrétna LT

Pre spojitý signál *vzorkovaný* s periódou τ a dĺžkou vzorkovacích pulzov $\Delta t (\ll \tau)$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t-k\tau)\Delta t$

$X(s) = \int_0^\infty x(k)\delta(t-k\tau)\Delta t e^{-sk\tau}dt = \Delta t \underline{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-sk\tau}}$ $\qquad$ **diskrétna LT**

S použitím substitúcie $z = e^{-s\tau}$

$\underline{X(s) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \Delta t X(z)}$

z - transformácia

$x(n-k) \leftrightarrow z^{-k} X(z)$

$x(k) = \delta(k) \leftrightarrow X(z) = 1$

$x(k) = u(k) \leftrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots$

$\quad = \frac{z}{z-1}$ (ak platí $\lim_{n\to\infty} z^{-n} \to 0$)

$x(k) = k \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

$x(k) = a^k \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}$

$x(t) = e^{ak\tau} \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-e^{a\tau}}$

$x(t) = \sin k\omega\tau \leftrightarrow X(z) = \frac{z \sin \omega\tau}{z^2 - 2z\cos\omega\tau + 1}$

$x(t) = \cos k\omega\tau \leftrightarrow X(z) = \frac{z(z - \cos\omega\tau)}{z^2 - 2z\cos\omega\tau + 1}$

3. ODOZVA LINEÁRNEHO SYSTÉMU NA DETERMINISTICKÝ SIGNÁL

3.1 REPREZENTÁCIA SYSTÉMU V ČASOVEJ OBLASTI

Opisom systému *v časovej oblasti* rozumieme (v rámci tohto kurzu) vyšetrovanie *časového priebehu* výstupného signálu zo systému $y(t)$ ako odozvy na daný (v zásade ľubovoľný) vstupný signál $x(t)$.

3.1.1 Pohybová rovnica systému

Ľubovoľný lineárny systém je vo všeobecnosti reprezentovaný dif. rovnicou charakterizujúcou jeho vývoj v čase - tzv. **pohybovou rovnicou**

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...+a_0 y = b_m\frac{d^m x}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+...+b_0 x \qquad n \geq m \text{ pre reálny systém}$$

Systém je teda jednoznačne charakterizovaný koeficientami a_k, b_k. Ak je systém *stacionárny* a *lineárny*, a_k, b_k sú *reálne konštanty.* Východiskom tohto prístupu je teda znalosť týchto koeficientov. V elektronickej praxi buď vychádzame zo známej schémy zapojenia, pričom správanie jednotlivých prvkov v schéme parametrizujeme príslušnými diferenciálnymi členmi, alebo pracujeme s tzv. *náhradnou schémou* (ak skutočnú schému nepoznáme alebo ju nahradzujeme funkčne ekvivalentnou jednoduchšou schémou).

Po zavedení formálneho operátora $D = \frac{d}{dt}$
$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_0)y = (b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + ... + b_0)x$

resp. $y = \frac{(b_m D^m+b_{m-1}D^{m-1}+...+b_0)}{(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+...+a_0)}x$

Konkrétny tvar odozvy $y(t)$ závisí od chrakteru vstupného signálu $x(t)$, resp. od počiatočných podmienok.

Riešenie *homogénnej* rovnice, tj odozva systému na nulový vstup ($y \neq 0$ pre $x = 0$) - tzv. **prechodové riešenie** - reprezentuje zotrvačný charakter systému (schopnosť systému akumulovať energiu)

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

Riešenie hľadáme v tvare $y = Ae^{\lambda t}$ (riešenie homogénnej dif. rov. 1. rádu separáciou premenných: $Dy + a_0 y = 0 \longrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -a_0 \int dt \longrightarrow \log y = -a_0 t \longrightarrow y = y_0 e^{-a_0 t}$, y_0 z počiatočných podm.)

$$A(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0)e^{\lambda t} = 0 \ \ , \ \ A \neq 0 \ \ , \ \ e^{\lambda t} \neq 0 \ \Rightarrow \ \underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0}_{\textit{charakteristická rovnica}}$$

$\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ - korene char. rovnice, odpovedajúce riešenia $A_k e^{\lambda_k t}$

λ_k môže výjsť *reálne* alebo *komplexne združený pár* - vtedy reálne (fyzikálne) riešenie je $y_k = A_k e^{\lambda_k t} + A_k^* e^{\lambda_k^* t}$

Všeobecné prechodové riešenie $y = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + ... + A_n e^{\lambda_n t}$, (treba n poč. podm.)

Pozn.:
Systém je *stabilný*, ak vlastné kmity zaniknú (prechodový jav) - nutnou a postačujúcou podmienkou je zápornosť reálnych častí koreňov charakteristickej rovnice - korene nesmú byť čisto imaginárne.

Iným čiastkovým riešením je **stacionárne riešenie** - odozva na pretrvávajúci ustálený vstupný signál po odoznení prechodových javov v systéme (tj. po utlmení prechodových riešení) - riešenie *nehomogénnej* rovnice.

Prípad systému 1. rádu:
$(D + a_0)y = b_0 x$ riešenie v tvare $y = A(t)e^{\lambda t} = A(t)e^{-a_0 t}$
(ako homog. rov., ale $A = A(t)$)

po dosadení $\frac{dA}{dt} e^{\lambda t} = b_0 x(t)$, $A(t) = b_0 \int_0^t e^{-\lambda\tau} x(\tau) d\tau$

(Namiesto obvyklého *neurčitého* integrálu na výpočet $A(t)$ sme tu použili *určitý* integrál typu $\int_0^t$ s *premennou* hornou hranicou t a *ľubovoľne "rozumne"* zvolenou dolnou hranicou tak aby hodnota primitívnej funkcie v nej bola 0 - predpokladáme "zapnutie" vstupného signálu v čase $t = 0$ - počiatočná podmienka).

Stacionárne riešenie $y = b_0 e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda\tau} x(\tau) d\tau = b_0 \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} x(\tau) d\tau$

Tento výraz predstavuje *konvolúciu* funkcií $x(t)$ a $b_0 e^{\lambda t}$.

Prípad systému n-tého rádu:

$$y = \frac{(b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + ... + b_0)}{(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_0)} x = K \frac{\prod_{l=1}^m (D - \eta_l)}{\prod_{i=1}^n (D - \lambda_i)} x =$$

$$= \frac{c_1 x}{D - \lambda_1} + \frac{c_2 x}{D - \lambda_2} + ... + \frac{c_n x}{D - \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{D - \lambda_i} x$$

kde η_l, λ_i sú korene polynómov v čitateli a menovateli - rozvoj na parciálne zlomky platí ak λ_i nie sú *viacnásobné* korene, c_i sa dopočítajú podľa vzťahu

$$c_i = K \frac{\prod_{l=1}^m (\lambda_i - \eta_l)}{\prod_{j=1,\neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \qquad \text{a teda} \qquad \frac{y}{x} = \sum_{i=1}^n \frac{K}{D - \lambda_i} \frac{\prod_{l=1}^m (\lambda_i - \eta_l)}{\prod_{j=1,\neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)}$$

Stacionárne riešenie má potom tvar $\sum_{k=1}^n c_k \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} x(\tau) d\tau$

Úplné riešenie $y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^n c_k \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} x(\tau) d\tau$

Pozn.:
Pri n-násobnom koreni λ sú riešenia $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ... t^{n-1} e^{\lambda t}$.

3.1.2 Impulzná charakteristika systému

Ak systém nevieme opísať prostredníctvom dif. rovnice (nepoznáme koeficienty a_k, b_k), alebo je takéto riešenie príliš pracné), alternatívou je vyšetrovanie **impulznej charakteristiky** systému $h(t)$ - odozvy systému na jednotkový impulz
$x(t) = \delta(t)$ $y(t) = \hat{T}\delta(t) = h(t)$ pre *stacionárny* systém $h(t - \tau) = \hat{T}\delta(t - \tau)$

V kombinácii so vzorkovacou vlastnosťou δ-funkcie $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ dostávame $y(t) = \hat{T}x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\hat{T}\delta(t-\tau)d\tau$ ($\hat{T}$ pôsobí na veličiny závislé od t, nie τ) a teda

$\underline{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau}$ - **Duhamelov (konvolučný) integrál**

Ak teda aplikujeme signál v tvare δ-impulzu na vstupe systému v čase $t = 0$, získame impulznú charakteristiku systému $h(t)$. Ak poznáme impulznú charakteristiku systému, jej konvolúciou s *ľubovoľným* vstupným signálom vieme určiť *stacionárnu* odozvu systému na tento signál. Pre reálny *kauzálny* systém nesmie odozva predbiehať príčinu, a teda platí $h(t) = 0$ pre všetky časy predchádzajúce impulzu na vstupe systému, a teda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Ak je vstupný signál $x(t)$ aplikovaný na reálny systém v čase $t = 0$ ($x(t) = 0$ pre $t < 0$), potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Duhamelov integrál je v podstate *vzájomnou korelačnou funkciou* vstupného signálu $x(t)$ a systémovej impulznej odozvy $h(t)$. Nenulové príspevky doň sú časovo obmedzené dĺžkou trvania impulznej odozvy systému, ktorá je mierou *zotrvačnosti* systému. Výraz $h(t-\tau)$ v Duhamelovom integráli je teda mierou toho, ako vstup v čase minulom voči t ovplyvňuje výstup v čase t.

Výnimočnosť δ-impulzu ako "testovacieho" signálu si uvedomíme ak uvážime, že jeho spektrálne zloženie je dokonale ploché (všetky frekvencie sú rovnomerne zastúpené), a teda odozva systému naň je odozvou "na všetkých frekvenciách". Treba si tiež uvedomiť, že zotrvačnosť odozvy systému na vonkajší podnet je z fyzikálneho hľadiska dôsledkom a teda aj bezprostrednou mierou *doby akumulovania energie* podnetu systémom. Keďže podľa Parsevalovej teorémy je energia signálu rozložená v celom jeho frekvenčnom spektre, je práve δ-impulz ideálnym testovacím signálom akumulačnej schopnosti systému.

Odozva na jednotkový impulz je tiež *mierou stability* systému:

$$|y(t)| = |\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)||h(\tau)|d\tau \leq B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau \text{ ak } |x(t)| \leq B$$

(ohraničený vstupný signál)

Výstupný signál je ohraničený ak $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$ (absolútna integrovateľnosť $h(t)$)

V nestabilnom systéme v dochádza v dôsledku spätnej väzby pri určitých frekvenciách k "neohraničenému" (rezonančnému) nárastu výstupného signálu. Keďže fourierovské spektrum δ-funkcie je dokonale ploché, aplikovanie δ-impulzu na vstupe systému je testom stability na všetkých frekvenciách.

Porovnaním konvolučneho integrálu so stacionárnym riešením systému n-tého rádu z predchádzajúcej kapitoly dostávame
$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ odkiaľ $\underline{h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}}$

Úplné riešenie systému n-tého rádu v časovej oblasti možno teda vyjadriť pomocou jeho impulznej charakteristiky
$\underline{y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau}$

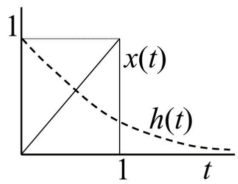
Pre *diskrétny* systém $x(n) = \sum_{k-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$ a konvolučný integrál prechádza na

konvolučnú sumu $\underline{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)}$

Podmienka stability diskrétneho systému je $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Pr.:
Systém 1. rádu.
Z riešenia pohybovej rovnice $\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x$ vyplýva $h(t) = b_0 e^{-a_0 t} = b_0 e^{-t/T}$ (pre $t \geq 0$, inak 0, $T > 0$). Nech $b_0 = 1$ a vstupný signál $x(t) = t$ pre $0 \leq t \leq 1$, inak 0.
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

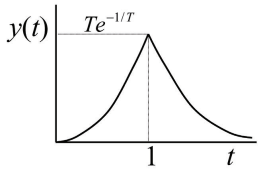
$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-(t-\tau)/T} & \tau \leq t \ (t-\tau \geq 0) \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$



$$x(\tau) = \begin{cases} \tau & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$\int_{t_1}^{t_2} \tau e^{-(t-\tau)/T} d\tau = ... = e^{-t/T} \int_{t_1}^{t_2} \tau e^{\tau/T} d\tau = e^{-t/T} \left[T(\tau - 1)e^{\tau/T} \right]_{t_1}^{t_2}$

$t < 0$: $y(t) = 0$
$0 \leq t \leq 1$ ($t_1 = 0$, $t_2 = t$) : $y(t) = T(t - 1 + e^{-t/T})$
$t > 1$ ($t_1 = 0$, $t_2 = 1$): $y(t) = Te^{-t/T}$
(pre $\tau > 1$ je nulové $x(t)$)



3.1.3 Prechodová charakteristika systému

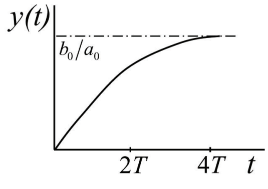
V praxi je možné na vstup systému priviesť krátky (ns) impulz, a snímanú odozvu systému považovať za aproximáciu jeho impulznej charakteristiky $h(t)$. Energetická nedostatočnosť reálneho impulzu však takýto prístup komplikuje. Výhodnejšie (a v praxi výrazne bližšie k idealizácii) je použitie iného "testovacieho" signálu - jednotkového skoku $u(t)$. Odozva systému na *jednotkový skok* sa nazýva **prechodovou charakteristikou** systému $g(t)$.

$x(t) = u(t)$ $\quad$ $\underline{y(t) = \hat{T}u(t) = g(t)}$ $\quad$ pre *stacionárny* systém $g(t-\tau) = \hat{T}u(t-\tau)$
pre *kauzálny* systém $g(t) = 0$ pre $t < 0$

Keďže $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$, $\quad$ $h(t) = \hat{T}\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\hat{T}u(t) = \underline{\frac{d}{dt}g(t)}$ $\quad$ $\underline{g(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau}$

$\underline{y(t) = x(0)g(t) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} g(t-\tau)d\tau}$ - alternatívny zápis Duhamelovho integrálu

Pr.:
Systém 1. rádu: $\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x$, $h(t) = b_0 e^{-a_0 t}$
$x(t) = u(t)$
$\underline{y(t) = \int_0^t u(t-\tau)h(\tau)d\tau = b_0 \int_0^t e^{-a_0\tau} d\tau = \frac{b_0}{a_0}[1 - e^{-t/T}]}$
$\frac{b_0}{a_0}$ - zosilnenie $\quad$ $T = \frac{1}{a_0}$ - časová konštanta



3.2 REPREZENTÁCIA SYSTÉMU VO FREKVENČNEJ OBLASTI

3.2.1 Prenosová charakteristika systému

Stacionárna odozva systému na *sinusoidálny* vstupný signál vo frekvenčnej oblasti sa nazýva **frekvenčnou**, resp. **prenosovou charakteristikou** systému.

Nech $y(t) = \hat{T}x(t) = \lambda x(t)$, kde λ je reálne alebo komplexné číslo
λ - *vlastná hodnota* operátora $\hat{T}$
$x(t)$ - *vlastná funkcia* operátora $\hat{T}$

Nech $x(t) = e^{i\omega t}$ $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau = \underbrace{\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}}\ \underbrace{\overbrace{e^{i\omega t}}} = \lambda x(t)$

$\underline{\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = H(i\omega)}$ - **prenosová charakteristika**

Prenosová charakteristika $H(i\omega)$ je teda FT impulznej charakteristiky $h(t)$

$$\underline{h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)e^{i\omega t}d\omega} \qquad \underline{H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt}$$

Keďže impulzná charakteristika systému je časovou odozvou na "všetky frekvencie" (rovnomerne obsiahnuté v spektre δ-impulzu), je prirodzené, že $H(i\omega)$ a $h(t)$ sú fourierovsky previazané.

Pre sínusoidálne (a *jedine* sínusoidálne) signály v komplexnej časovej reprezentácii - $x(t), y(t)$ *komplexné* - môžeme písať $\quad y(t) = H(i\omega)x(t) \qquad H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$
$|H(i\omega)|$ - **amplitúdová prenosová charakteristika** systému
$\varphi(\omega)$ - **fázová prenosová charakteristika** systému

Výstupný signál sleduje v čase vstupný, s rovnakou frekvenciou, amplitúdou zmenenou o faktor $|H(i\omega)|$, a s časovým, a teda fázovým posunom $\varphi = \arctan\frac{\Im\{H(i\omega)\}}{\Re\{H(i\omega)\}}$. Znamená to, že $\Re\{H(i\omega)\}$ určuje zložku výstupného signálu *vo fáze* so vstupným signálom, a $\Im\{H(i\omega)\}$ zložku výstupného signálu *posunutú vo fáze o* $\pi/2$ voči výstupnému signálu.

Pozn.:
Výrazy typu $y(t) = H(i\omega)x(t)$ sú "potenciálne nebezpečné", pretože miešajú časové a frekvenčné reprezentácie veličín. Sú teda *neprípustné* pre *všeobecné* časové priebehy veličín, a možno ich použiť *len pre sínusoidálne* priebehy.

Pre *ľubovoľný* (neharmonický) vstupný signál predstavuje $H(i\omega)$ *komplexnú odozvu* lineárneho systému *na príslušnú harmonickú zložku* v spektre vstupného signálu - komplexný charakter $H(i\omega)$ znamená súčasnú informáciu o prenose amplitúdy a o fázovom posuve príslušnej harmonickej zložky.

FT: $\quad x(t) \leftrightarrow X(\omega) \qquad y(t) \leftrightarrow Y(\omega) \qquad h(t) \leftrightarrow H(i\omega)$
Z vlastností FT a konvolúcie vyplýva: $\underline{y(t) = h(t) * x(t)} \qquad \underline{Y(\omega) = H(i\omega)X(\omega)}$
(konvolúcia v časovej oblasti $\Leftrightarrow$ súčin vo frekvenčnej oblasti, a naopak)

Podobne $\quad Y^*(\omega) = H^*(i\omega)X^*(\omega) \qquad \underline{|Y(\omega)|^2 = |H(i\omega)|^2|X(\omega)|^2}$

$h(t)$ je *reálna* $\Rightarrow$ $\underline{H(i\omega) = H^*(-i\omega)}$ - podmienka fyzikálne *reálneho* systému

$\Rightarrow$ $|H(i\omega)|$ musí byť *párna* a $\varphi(\omega)$ musí byť *nepárna* funkcia ω

Interakciu ľubovoľného signálu s ľubovoľným lineárnym systémom môžeme teda skúmať pomocou $h(t)$ alebo $H(i\omega)$ - prechod z časovej do frekvenčnej oblasti znamená transformáciu $\frac{d}{dt} \to i\omega$ (v konvencii E).

Predpokladajme stacionárny lineárny systém n-tého rádu s harmonickým vstupným signálom $x(t) = A\cos\omega t = A\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$. Z pohybovej rovnice systému dostávame

$$\frac{y}{x} = \frac{b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + ... + b_0}{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{D - \lambda_k}$$

Výstupný signál $y(t)$ je daný konvolúciou $x(t) * h(t)$, pričom $h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}$.
Pre 1. člen cos a 1. člen $h(t)$ platí

$$y_1(t) = \frac{c_1 A}{2}\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{c_1 A}{2} e^{\lambda_1 t}\int_0^t e^{(i\omega-\lambda_1)\tau} d\tau = \frac{c_1 A}{2}\frac{e^{i\omega t} - e^{\lambda_1 t}}{i\omega - \lambda_1}$$

Pre všetky členy, po doznení prechodových javov (tj. utlmení členov $e^{\lambda_k t}$), platí

$$y(t)|_{t\to\infty} = \frac{A}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{i\omega - \lambda_k}\right) e^{i\omega t} + \textit{kompl. združ.} = \frac{A}{2}H(i\omega)e^{i\omega t} + \frac{A}{2}H^*(i\omega)e^{-i\omega t}$$

Prenosová charakteristika systému je teda

$$\underline{H(i\omega) = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{i\omega - \lambda_k} = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + ... + b_0}{(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + a_0}} \qquad \underline{D \to i\omega}$$

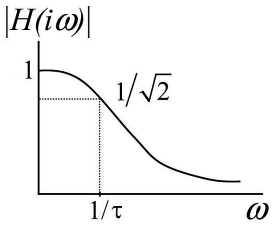
a výstupný signál môžeme zapísať v tvare

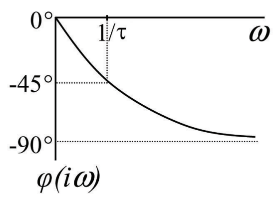
$$\underline{y(t)|_{t\to\infty} = \frac{A|H(i\omega)|}{2}[e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}] = A|H(i\omega)|\cos(\omega t + \varphi)}$$

Pr.:
Systém 1. rádu

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega)(i\omega + a_0) = b_0 X(\omega) \qquad \underline{H(i\omega) = \frac{b_0}{a_0 + i\omega} = \frac{K}{1 + i\omega\tau}}$$

$\tau = \frac{1}{a_0}$ - časová konštanta
$K = \frac{b_0}{a_0}$ - zosilnenie
$\underline{|H(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}}$
$\underline{\varphi(i\omega) = \arctan(-\omega\tau)}$





pre $\omega = 1/\tau$: $|H| = K/\sqrt{2}$, $\varphi = -45°$ pre $\omega \to \infty$: $|H| \to 0$, $\varphi = -90°$

Pr.:
Systém 2. rádu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x \qquad \frac{d}{dt} \to i\omega \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2} \to -\omega^2 \qquad \underline{H(i\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}}$$

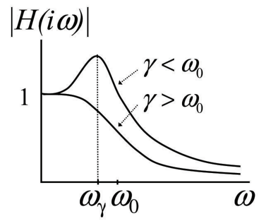
$\omega = 0 : |H| = 1 \;, \varphi = 0$
$\omega \to \infty : |H| \to 0 \;, \varphi \to -180$
$\omega = \omega_0 : |H| = \frac{\omega_0}{2\gamma} \;, \varphi = -90$

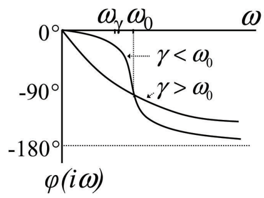
$|H(i\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$ $\qquad \varphi = -\arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

$max\{|H(i\omega)|\} : \frac{d|H(i\omega)|}{d\omega} = 0$

$\omega_{max} = \omega_\gamma = \omega_0 \sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}$

$|H(i\omega)|_{max} = \frac{\omega_0}{2\gamma\sqrt{1-2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}}$





ak $\gamma > \omega_0$ - systém je *pretlmený* - nenastáva rezonancia

Na kvalitatívnu analýzu frekvenčných charakteristík systémov možno použiť metódu Bodeho grafov, opísanú v Dodatku B.

3.2.2 Kauzálnosť systému a Kramersove-Kronigove vzťahy

Impulznú odozvu systému $h(t)$ (ako aj každú inú funkciu) vieme vyjadriť ako súčet párnej a nepárnej funkcie

$$h(t) = h_p(t) + h_n(t) \qquad h_p(t) = \frac{1}{2}[h(-t) + h(t)] \qquad h_n(t) = \frac{1}{2}[-h(-t) + h(t)]$$

Podmienkou kauzálnosti systému je $h(t) = 0$ pre $t < 0$ (predpokladáme δ-impulz na vstupe v $t = 0$), z čoho plynie $h_p(t) = -h_n(t)$ pre $t < 0$. Keďže $h_p(-t) = h_p(t)$ a $h_n(-t) = -h_n(t)$, musí platiť $h_p(t) = h_n(t)$ pre $t > 0$. Teda

$$\underline{h_p(t) = \mathrm{sign}(t) h_n(t)} \qquad \mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1 \;, & t > 0 \\ -1 \;, & t < 0 \\ 0 \;, & t = 0 \end{cases}$$
$$\underline{h_n(t) = \mathrm{sign}(t) h_p(t)}$$

Tieto vzťahy nazývame **Kramersovými-Kronigovými vzťahmi** (KKV) v *časovej* oblasti, a sú bezprostredným dôsledkom požiadavky kauzality. Známejšia je ich verzia vo *frekvenčnej* oblasti, ktorú získame nasledovne.

Aby sme zdôraznili všeobecný charakter týchto úvah, nahradíme vo zvyšku tejto kapitoly pojem prenosová charakteristika lineárneho systému (ekvivalentným) pojmom **zovšeobecnená susceptibilita** (používaným v širšom fyzikálnom kontexte)

$$\chi(i\omega) = \frac{\text{odozva}(\omega)}{\text{príčina}(\omega)} = \chi'(\omega) + i\chi''((\omega)$$

(v E-konvencii). Platí pre ňu FT

$$\chi(i\omega) = H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (h_p(t) + h_n(t))(\cos\omega t - i \sin\omega t) dt$$

kde s využitím skutočnosti, že $\int_{-\infty}^{\infty}(\text{nepárna } f(t))dt = 0$

$$\Re\{H(i\omega)\} = \underline{\chi'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(t) \cos\omega t dt} \qquad \text{očividne párna } f(\omega)$$

$$\Im\{H(i\omega)\} = \underline{\chi''(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) \sin\omega t dt} \qquad \text{očividne nepárna } f(\omega)$$

Rozšírením integrálu pre $\chi'(\omega)$ o *nulový* príspevok (*nepárny* podintegrálny člen) dostávame $\chi'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(t)\cos\omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(t)e^{-i\omega t}dt$, čo je FT vzťah. Platí teda aj spätná FT $h_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi'(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, čo s uvážením párnosti $\chi'(\omega)$ prejde na

$$\underline{h_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi'(\omega)\cos\omega t d\omega}$$

Obdobným spôsobom dostaneme FT $i\chi''(\omega) \leftrightarrow h_n(t)$ a z toho

$$\underline{h_n(t) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi''(\omega)\sin\omega t d\omega}$$

Frekvenčnú verziu KKV dostaneme pomocou FT ich časovej verzie (súčin $\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}$ konvolúcia)

$$h_p(t) = \mathrm{sign}(t)h_n(t) \quad\leftrightarrow\quad \chi'(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{i\omega} * i\chi''(\omega)\right)$$

$$h_n(t) = \mathrm{sign}(t)h_p(t) \quad\leftrightarrow\quad i\chi''(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{i\omega} * \chi'(\omega)\right)$$

kde FT funkcie $\mathrm{sign}(t)$ sme určili pomocou jednotkového skoku $u(t)$

$$\mathrm{sign}(t) = 2u(t) - 1 \quad\leftrightarrow\quad 2\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{i\omega}$$

Napokon

$$\underline{\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega' = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\chi''(\omega')}{\omega^2-\omega'^2}d\omega'}$$

$$\underline{\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi'(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega' = -\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\chi'(\omega')}{\omega^2-\omega'^2}d\omega'}$$

Symbol $\mathcal{P}\int$ predstavuje integrál (Cauchy) v zmysle vlastnej hodnoty (podintegrálny výraz je formálne neintegrovateľný, integrál je však konečný). Pri pravých častiach rovníc sme využili fakt, že integrál $\int_{-\infty}^{\infty}$ z nepárnej funkcie je 0 a z párnej je $2\int_{0}^{\infty}$. Súhrnne tieto vzťahy možno prepísať do tvaru

$$\underline{\chi(i\omega) = \frac{1}{i\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(i\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'}$$

Hodnota reálnej, resp. imaginárnej časti $\chi(i\omega)$ *pre dané* ω je teda určená imaginárnou, resp. reálnou časťou $\chi(i\omega)$ *v celom spektre* (výraz $\frac{1}{\omega-\omega'}$ však zabezpečuje podstatný príspevok k integrálu len z okolia daného ω).

Pozn.:
V konvencii F menia KKV znamienko. Dôkaz KKV možno tiež realizovať pomocou Cauchyho vety o reziduách, pričom sa predpokladá, že pre $\omega \to \pm\infty$ klesá $\chi(i\omega)$ rýchlejšie než $\frac{1}{\omega}$ (reálny systém "nestíha" reagovať na rýchle podnety), a že $\chi(i\omega)$ je analytická všade v dolnej (v konvencii E), resp. hornej (v konvencii F) komplexnej polrovine ω'.

Dôležitou je otázka *fyzikálneho významu* reálnej a imaginárnej časti zovšeobecnenej susceptibility (prenosovej charakteristiky). Analyzujeme ju na príklade systému 1. rádu

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t) \qquad\qquad H(i\omega) = \frac{b_0/a_0}{1+i\omega/a_0}$$

Predpokladajme, že súčin príčiny a odozvy (vstupného a výstupného signálu) $x(t)y(t)$ má rozmer *energie*. Príkladom môže byť skúmanie nabíjania kondenzátora zo zdroja napätia, $x(t) =$ napätie $u(t)$, $y(t) =$ náboj $q(t)$. Prechodom do frekvenčnej oblasti skúmame pomery harmonických zložiek $U(\omega), Q(\omega)$, pričom

$$q(t)|_\omega = \chi(i\omega)u(t)|_\omega \qquad Q(\omega) = \chi(i\omega)U(\omega) \qquad \chi(i\omega) = \frac{C - i\omega RC^2}{1+(\omega RC)^2}$$

Zovšeobecnená susceptibilita $\chi(\omega)$ má v tomto prípade rozmer kapacity. $\chi'(\omega)$ dáva do pomeru k príčine zložku odozvy *vo fáze* s príčinou - v našom príklade harmonické nabíjanie $q(t)$ k harmonickému napätiu $u(t)$. Je mierou *energie akumulovanej v systéme* - kondenzátore (práce dodanej zdrojom, $q(t) \cdot u(t)$). Naopak, $\chi''(\omega)$ je pomerom harmonických zložiek *posunutých vo fáze o* $\pi/2$ - teda harmonického prúdu $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ a napätia, a je teda mierou *strát energie v systéme* (výkonu na odpore, $u(t) \cdot i(t)$).

Predpokladajme teraz, že súčin vstupného a výstupného signálu má rozmer *výkonu*. Príkladom môže byť skúmanie rýchlosti $v(t)$ telesa (m) vo viskóznom (η) prostredí pod vplyvom budiacej sily $f(t)$

$$m\frac{dv(t)}{dt} + \eta v(t) = f(t) \qquad \chi(i\omega) = \frac{\eta - i\omega m}{\eta^2 + (\omega m)^2}$$

Zovšeobecnená susceptibilita má v tomto prípade rozmer $1/\eta$, pričom $\chi'(\omega)$ je mierou viskóznych *strát* $(v(t) \cdot f(t))$, a $\chi''(\omega)$ reprezentuje *energiu akumulovanú* v pohybe.

Jeden zo spôsobov, ako rýchlo určiť, ktorá zo zložiek $\chi(\omega)$ reprezentuje akumuláciu, resp. dissipáciu, je "vypnúť" straty $(R, \eta \to 0)$ - stratová zložka $\chi(\omega)$ zanikne.

Osobitný fyzikálny význam priraďujeme tzv. **statickej susceptibilite** $\chi(0) = \chi'(\omega \to 0)$. Z KKV v limite $\omega \to 0$ vyplýva

$$\chi'(0) = \frac{-2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\chi''(i\omega')}{\omega'}d\omega' \qquad \chi''(0) = 0$$

V uvedených príkladoch $\chi(0) = C$, resp. $1/\eta$, a teda $Q(0) = CU(0)$, resp. $V(0) = F(0)/\eta$, čo opäť vypovedá o akumulačnom, resp. dissipačnom charaktere $\chi(i\omega)$.

Dôležitou zovšeobecnenou susceptibilitou vo fyzike materiálov je napr. dielektrická funkcia - Dodatok C.

3.2.3 Prenosová charakteristika v laplaceovskej reprezentácii

Ak namiesto *fourierovskej* reprezentácie signálu a systému použijeme *laplaceovskú*, hovoríme o tzv. **operátorovej metóde**.

Predpokladajme systém n-tého rádu bez počiatočnej akumulovanej energie, teda
$x(t) = 0$ pre $t < 0$ $\qquad y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = ... = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0$

Derivácie v dif. rovnici systému

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_0y(t) = b_m\frac{d^mx(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_0x(t)$$

nahradíme **operátorom** s (komplexnou frekvenciou) $\qquad \frac{d^kx(t)}{dt^k} = s^kX(s)$, $\frac{d^ky(t)}{dt^k} = s^kY(s)$

$$(a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_0)X(s)$$

Výhodou operátorovej metódy je prechod od dif. rovníc k algebrickým a relatívna jednoduchosť určenia časovej odozvy systému.

Pr.:
Systém 1. rádu

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t) \;\;\rightarrow\;\; TsY(s) + Y(s) = KX(s) \;\;,\;\; \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{1+sT}$$

Prechodová odozva
$x(t) = u(t) \;\rightarrow\; X(s) = \frac{1}{s} \quad , \; Y(s) = \frac{K}{s(1+sT)} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{1}{T}+s}\right) \;\rightarrow\; \underline{y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)u(t)}$

Odozva na pravouhlý impulz dĺžky τ
$x(t) = A$ pre $0 \le t \le \tau$, inde 0

$X(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{s}e^{-s\tau}$ - superpozícia vzostupného a posunutého zostupného jedn. skoku

$$Y(s) = \frac{K}{1+sT}X(s) = \frac{K}{1+sT}\left(\frac{A}{s} - \frac{A}{s}e^{-s\tau}\right)$$

$\frac{KA}{s(1+sT)} \rightarrow \underline{KA\left(1 - e^{-t/T}\right)u(t) = y_1(t)}$

$-\frac{KA}{s(1+sT)}e^{-s\tau} \rightarrow \underline{-KA\left(1 - e^{-(t-\tau)/T}\right)u(t-\tau) = y_2(t)}$ posunuté v čase o τ oproti $y_1(t)$

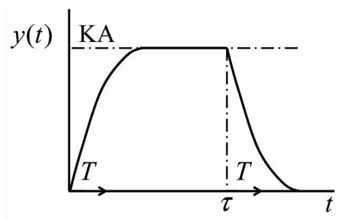
$$(u(t-\tau)x(t-\tau) \longleftrightarrow X(s)e^{-s\tau})$$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

$y(t) = KA\left(1 - e^{-t/T}\right)$, $0 < t < \tau$

$y(t) = -KA\left(1 - e^{\tau/T}\right)e^{-t/T}$, $t > \tau$

$y(t) \rightarrow 0$, $t \gg \tau$



Pr.:
Systém 2. rádu

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 x(t) \qquad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2}$$

Prechodová odozva

$$X(s) = \frac{1}{s} \qquad Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2)} \qquad \text{korene } s_0 = 0 \text{ a } s_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- ak $\gamma > \omega_0$: s_1, s_2 sú 2 *rôzne reálne* korene, pričom $s_1 s_2 = \omega_0^2$ - *pretlmený* systém

$Y(s) = \omega_0^2\left[\frac{1}{s_1 s_2 s} + \frac{1}{s_1(s_1-s_2)(s-s_1)} + \frac{1}{s_2(s_2-s_1)(s-s_2)}\right] \;\rightarrow\; \underline{y(t) = \left[1 + \frac{s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \frac{s_1}{s_2-s_1}e^{s_2 t}\right]u(t)}$

- ak $\gamma = \omega_0$: $s_{1,2} = -\omega_0$ je *dvojitý reálny* koreň - *kritické* tlmenie

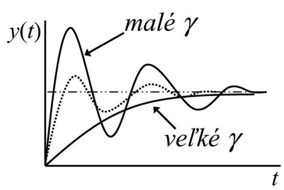
$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s+\omega_0)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_0} - \frac{\omega_0}{(s+\omega_0)^2} \quad \rightarrow \quad \underline{y(t) = \left[1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}\right]u(t)}$

$$\left(X(s+a) \rightarrow e^{-at}x(t)\ ,\ \frac{1}{s^2} \rightarrow t\ ,\ \frac{1}{(s+\omega_0)^2} \rightarrow te^{-\omega_0 t}\right)$$

- ak $\gamma < \omega_0$: 2 *komplexne združené* korene - *podtlmený* systém

$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2\gamma}{s^2+2\gamma s+\omega_0^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2+\omega_\gamma^2} - \frac{\gamma}{\omega_\gamma}\frac{\omega_\gamma}{(s+\gamma)^2+\omega_\gamma^2}$

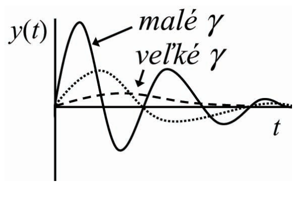
$\underline{y(t) = \left[1 - e^{-\gamma t}\left[\cos\omega_\gamma t + \frac{\gamma}{\omega_\gamma}\sin\omega_\gamma t\right]\right]u(t)} \qquad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$



Impulzná odozva
$x(t) = \delta(t) \;\rightarrow\; X(s) = 1$

$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+2\gamma s+\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s+\gamma)^2+\omega_\gamma^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_\gamma}\frac{\omega_\gamma}{(s+\gamma)^2+\omega_\gamma^2}$

$\underline{y(t) = \left[\frac{\omega_0^2}{\omega_\gamma}e^{-\gamma t}\sin\omega_\gamma t\right]u(t)}$



3.2.4 Prenosová funkcia v komplexnej rovine

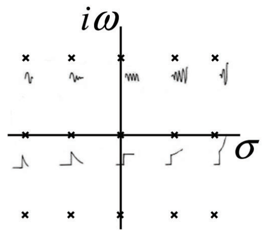
Prenosová funkcia systému $K(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0)}$ závisí len od vlastností systému (pre fyzikálne "rozumné" systémy $n \geq m$, korene polynómov sú buď *reálne* alebo *komplexne združené páry* - dôsledok reálnosti koeficientov dif. rovnice systému).

Polynómy vo výraze $K(s)$ možno vyjadriť v tvare $K(s) = K_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$, kde korene čitateľa z_k sú **nulovými bodmi**, a korene menovateľa p_k sú **pólmi** prenosovej funkcie v *komplexnej rovine.* z_k, p_k sú reálne alebo komplexne združené páry, môžu byť jednotlivé alebo viacnásobné.

Predpokladajme, že póly *nie sú* viacnásobné. Prenosová funkcia sa dá rozložiť na parciálne zlomky $K(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + ... + \frac{K_n}{s-p_n}$ a jej LT je $k(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + ... + K_n e^{p_n t}$.

Ak póly ležia na reálnej osi, $p = \sigma$ - *reálne* č., príslušný mód je $Ke^{\sigma t}$ $(t \geq 0)$, a je to *neohraničene rastúca* odozva pre $\sigma > 0$, *jednotková* odozva pre $\sigma = 0$, a *tlmená* odozva pre $\sigma < 0$.

Ak póly sú *komplexné*, existujú v *združených pároch* (symetricky okolo reálnej osi), príslušný mód je $Ke^{pt} + K^* e^{p^* t} = |K| e^{i\varphi} e^{(\sigma + i\omega)t} + |K| e^{-i\varphi} e^{(\sigma - i\omega)t} = 2|K| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$. Podľa hodnoty σ je to sinusoidálna odozva s amplitúdou neohraničene rastúcou, konštantnou alebo tlmenou.



Póly $\sigma < 0$ znamenajú *stabilný systém.*

Póly $\sigma > 0$ znamenajú *nestabilný systém.*

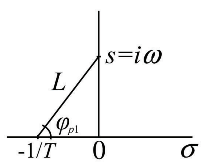
Póly $\sigma = 0$ znamenajú *hraničnú stabilitu.*

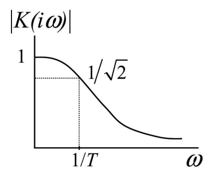
Časová konštanta klesá s rastúcou vzdialenosťou od imaginárnej osi $\sigma = 0$.

Keďže $|K(s)| = K \frac{|s-z_1||s-z_2|...|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|...|s-p_m|}$ a $|s - z_k|$ je vzdialenosť daného bodu v komplexnej rovine (komplexnej frekvencie s) od nulového bodu (pre póly detto), amplitúda prenosu pre danú frekvenciu ω závisí od vzdialenosti $s = i\omega$ od z_k, p_k.

Fázový posun je
$\varphi = \arctan \frac{y - y_{z_1}}{x - x_{z_1}} + \arctan \frac{y - y_{z_2}}{x - x_{z_2}} + ... + \arctan \frac{y - y_{z_m}}{x - x_{z_m}} - \arctan \frac{y - y_{p_1}}{x - x_{p_1}} - ... - \arctan \frac{y - y_{p_n}}{x - x_{p_n}}$
pričom $x = 0$, $y = \omega$ pre $s = i\omega$.

Pr.:
Systém 1. rádu
$K(s) = \frac{1}{1+sT} = \frac{1}{T(s+\frac{1}{T})}$ (treba aby koeficient pri s bol 1)
Pól $s = -\frac{1}{T}$ - veľkosť odozvy $\sim$ (vzdialenosť $s = i\omega$ od pólu)$^{-1}$
$L = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}}$
$\varphi = -\varphi_{p1} = -\arctan \omega T$
$|K(s)| = \frac{1}{T} \frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$
Nárast ω - nárast L - *pokles* $|K(s)|$ aj nárast $|\varphi|$





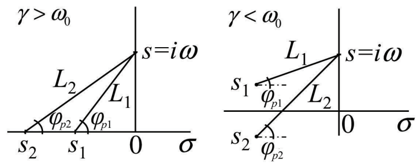
Pr.:
Systém 2. rádu
$K(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2}$ Póly $s = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$|K(s)| = \frac{\omega_0^2}{L_1 L_2}$ $\qquad\qquad \varphi = -(\varphi_{p1} + \varphi_{p2})$

- Ak $\gamma > \omega_0$:

S rastom ω rastú L_1, L_2 aj $\varphi_{p1}, \varphi_{p2}$.

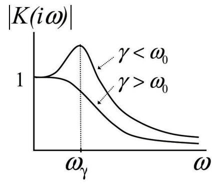
$|K(s)|$ *klesá* a $|\varphi|$ *rastie* ($\varphi < 0$).



- Ak $\gamma < \omega_0$:

S rastom ω $L_2, \varphi_{p1}, \varphi_{p2}$ monotónne rastú, L_1 najprv klesá, potom rastie.

$|K(s)|$ *má maximum*, $|\varphi|$ *monotónne rastie* (prudko v okolí ω_0).



Ak nejaký pól prenosovej funkcie systému má *zápornú* reálnu časť *oveľa väčšiu* (viac než 10-násobne) než ostatné póly, možno ho "*zanedbať*" - v prechodovej odozve vypadne (rýchle tlmenie) ale v stacionárnej odozve sa uplatní redukovaním zosilnenia.

Napr. $\quad K(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)} \qquad s_1 = 0, \qquad s_2 = -2, \qquad s_3 = -30 \qquad\qquad K(s) \to \frac{K/30}{s(s+2)}$

3.2.5 Niektoré zložené systémy. Stabilita

Najjednoduchšími zloženými systémami sú sériové (**kaskáda**) a paralelné zapojenie jednoduchých systémov. Pre ich prenosové charakteristiky platí

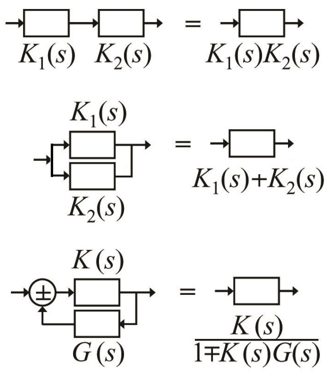
$$\underline{K(s) = K_1(s)K_2(s)} \qquad\qquad \underline{K(s) = K_1(s) + K_2(s)}$$

Prenosy v decibeloch sa pri kaskáde sčítavajú.

Dôležitým zloženým systémom je systém so **spätnou väzbou** (SV) - signál z výstupu systému je privedený na jeho vstup pomocou *spätnoväzbovej* vetvy s prenosovou charakteristikou $G(s)$. Na vstupe dostávame $X(s) \pm G(s)Y(s)$. Znamienko $\pm$ odpovedá *kladnej*, resp. *zápornej* SV. Výsledný výstupný signál je potom $Y(s) = K(s)[X(s) \pm G(s)Y(s)]$

Prenosová charakteristika má tvar (Blackov vzťah)

$$\underline{\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(s)}{1 \mp K(s)G(s)}}$$



Je zrejmé, že kladná SV (znamienko - v menovateli) je zdrojom nestability systému - pre $K(s)G(s) \to 1$ prenos neobmedzene rastie. Záporná SV naopak stabilizuje systém. Keďže však je spätnoväzbový prenos $G(s)$ frekvenčne závislý (a teda aj fázový prosuv závisí od frekvencie), môže sa napr. záporná SV pre nízke frekvencie stať kladnou SV pre vysoké frekvencie (fázový posuv $\approx 180°$).

Pozn.: Pri odvodení Blackovho vzťahu sa predpokladá *ideálne* prenosové systémy ($K(s), G(s)$ nezávisia od záťaže - nekonečný vstupný a nulový výstupný odpor). Pre reálne systémy je Blackov vzťah len prvým priblížením.

Na Blackovom vzťahu je založené **Nyquistovo kritérium stability** systému so SV (Dodatok F).

4. LINEÁRNE ELEKTRONICKÉ PRVKY A OBVODY

4.1 LINEÁRNE PASÍVNE PRVKY

4.1.1 Rezistor / odpor

Zavedením pojmu *driftovej rýchlosti* nosičov náboja (elektrónov) $\vec{v}_d$ ako *spriemerovanej* (cez čas aj súbor nosičov) *usmernenej* rýchlosti rozptyľujúcich sa nosičov prechádza ich pohybová rovnica na tvar

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \to m\frac{\vec{v}_d}{\tau} = -e\vec{E}$$

kde τ je charakteristický relaxačný čas elektrónovej hybnosti (resp. stredná zrážková perióda). Odtiaľ pre hustotu prúdu elektrónov s koncentráciou n platí

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

čo je diferenciálny tvar Ohmovho zákona s mernou vodivosťou

$$\underline{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

Pre prúd a napätie na úseku dĺžky l valcového vodiča o priereze S a mernom odpore $\rho = \frac{1}{\sigma}$ platí

$$\mathcal{I} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS \qquad \text{v homogénnom vodiči}$$

$$\mathcal{U} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \rho j dl = I\left(\rho\frac{l}{S}\right) = \underline{\mathcal{I}R}$$

čo je Ohmov zákon v integrálnom tvare pre odpor $R = \rho\frac{l}{S}$.

Zdroj napätia koná na odpore prácu premiestňovaním (kladného) náboja $dW = \mathcal{U}dq = \mathcal{U}\mathcal{I}dt$, a jeho výkon je

$$\underline{\mathcal{P} = \mathcal{U}\mathcal{I} = \frac{\mathcal{U}^2}{R} = R\mathcal{I}^2}$$

Táto práca sa premieňa na *teplo* s objemovou hustotou (jeho premeny za čas)

$$p = \frac{d\mathcal{P}}{dV} = \frac{E\overbrace{dl}\,j\,\overbrace{dS}}{\underbrace{dV}} = Ej = \underline{\vec{E} \cdot \vec{j}}$$

Z uvedeného tiež vyplýva, že:

- pri *sériovom* spojení dvoch (rovnakých) odporov R nimi preteká *ten istý prúd* $\mathcal{I}$, a teda na každom z nich je napätie $\mathcal{U}$, výsledný výkon prúdu je teda

$$\mathcal{P}_v = 2 \cdot \mathcal{U}\mathcal{I} = 2\mathcal{I}^2R = \mathcal{I}^2R_v \qquad \text{výsledný odpor je } \underline{R_v = 2R}$$

- pri *paralelnom* spojení dvoch (rovnakých) odporov R je na oboch *to isté napätie* a prúd $\mathcal{I}$ sa delí medzi ne, výsledný výkon je

$$\mathcal{P}_v = 2 \cdot \mathcal{U}\frac{\mathcal{I}}{2} = 2R\left(\frac{\mathcal{I}}{2}\right)^2 = \mathcal{I}^2\frac{R}{2} \qquad \text{výsledný odpor je } \underline{R_v = \frac{R}{2}}$$

Na zamyslenie: Interpretácia Poyntingovho vektora na povrchu rezistora pretekaného prúdom.

4.1.2 Kondenzátor / kapacita

Elektrické pole medzi doskami kondenzátora o ploche S vzdialenými od seba l pri náboji q je $|\vec{E}| = \frac{q}{\varepsilon S}$ (ε - permitivita prostredia medzi doskami), a napätie medzi doskami je

$$\mathcal{U} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = |\vec{E}|l = q\left(\frac{l}{\varepsilon S}\right) = \frac{q}{C}$$

Kapacita doskového kondenzátora je teda $C = \frac{\varepsilon S}{l}$.

Práca potrebná na jeho nabitie o dq, resp. q, je

$$dW = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = dq \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{l}{\varepsilon S} q dq$$

$$W = \frac{l}{\varepsilon S}\int q dq = \underline{\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}C\mathcal{U}^2}$$

a je rovná energii *naakumulovanej* v kondenzátore (v elektrostatickom poli medzi doskami) s objemovou hustotou

$$w = \frac{W}{V} = \frac{C\mathcal{U}^2}{2Sl} = \underline{\frac{\varepsilon(\vec{E})^2}{2}}$$

(predpokladáme *izotropné* dielektrikum s permitivitou ε).

Z uvedeného tiež vyplýva, že:

- pri *paralelnom* zapojení dvoch (rovnakých) kapacít je na oboch to isté napätie, a teda celková akumulovaná energia je

$$E_v = 2\left(\frac{1}{2}C\mathcal{U}^2\right) = \frac{1}{2}(2C)\mathcal{U}^2 \qquad \text{výsledná kapacita je } \underline{C_v = 2C}$$

- pri *sériovom* zapojení dvoch (rovnakých) kapacít je na každej z nich napätie $\mathcal{U}$, výsledné napätie je $\mathcal{U}_v = 2\mathcal{U}$, a celková akumulovaná energia je

$$E_v = 2\left(\frac{1}{2}C\mathcal{U}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{2}\right)\mathcal{U}_v^2 \qquad \text{výsledná kapacita je } \underline{C_v = \frac{C}{2}}$$

Vzťah medzi prúdom a napätím na kondenzátore je

$$\underline{\mathcal{I} = \frac{dq}{dt} = C\frac{d\mathcal{U}}{dt}} \qquad \underline{\mathcal{U} = \frac{1}{C}\int \mathcal{I} dt}$$

Na zamyslenie: Interpretácia Poyntingovho vektora v kondenzátore počas nabíjania.

4.1.3 Cievka / indukčnosť

Dynamická definícia (vlastnej) indukčnosti prostredníctvom samoindukovaného napätia

$$\mathcal{U}_i = -L\frac{d\mathcal{I}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad\qquad \Phi = L\mathcal{I}$$

Magnetické pole v dlhom solenoide je

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = Bl = \mu_0 N\mathcal{I} \qquad (N \text{ - počet obopnutých závitov}) \qquad B = \mu_0\frac{N}{l}\mathcal{I}$$

Magnetický tok N závitmi solenoidu na dĺžke l je

$$\Phi = N\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \left(\mu_0\frac{N^2}{l}S\right)\mathcal{I} = L\mathcal{I} \qquad\qquad \underline{L = \mu_0\frac{N^2}{l}S}$$

Výkon zdroja napájajúceho cievku je

$$\mathcal{P} = \mathcal{U}\mathcal{I} = -\mathcal{U}_i\mathcal{I} = L\mathcal{I}\frac{d\mathcal{I}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\mathcal{I}^2\right)$$

a energia akumulovaná v cievke pri prúde $\mathcal{I}$ je

$$\underline{E_L = \frac{1}{2}L\mathcal{I}^2}$$

s objemovou hustotou (t.j. hustotou energie magnetického poľa)

$$w = \frac{L\mathcal{I}^2}{2V} = \frac{L\mathcal{I}^2}{2Sl} = ... = \underline{\frac{B^2}{2\mu_0}}$$

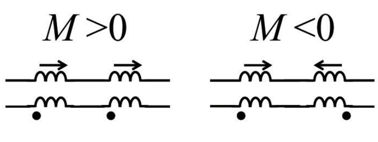
Skladanie indukčností je identické ako pri odporoch.
(rovnaké argumenty: $\mathcal{P} = R\mathcal{I}^2$, $E_L = \frac{L}{2}\mathcal{I}^2$)

4.1.4 Transformátor / vzájomná indukčnosť

Transformátor je sústava 2 indukčností (cievok), medzi ktorými existuje *magnetická väzba* - magnetický tok generovaný prúdom v jednej indukčnosti čiastočne alebo úplne preniká druhou indukčnosťou. Miera magnetickej väzby je vyjadrená **vzájomnou indukčnosťou**

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad\qquad 0 \le k < 1$$

$M > 0$ ak magnetické toky oboch cievok majú *rovnaký* smer (rovnako vinuté cievky)
$M < 0$ ak magnetické toky oboch cievok majú *navzájom opačný* smer (opačne vinuté cievky)



Pre *sériovo viazané* cievky platí $\qquad L_v = L_1 + L_2 \pm 2M$

Nech $L_1 = L_2 = L$, potom $L_v = 2L(1 \pm k)$

Ak $k = 0$ - cievky nie sú vo väzbe - $L_v = 2L$

Ak $k = 1$ - dokonalá väzba: pre $\uparrow\uparrow$ $L_v = 4L$

pre $\uparrow\downarrow$ $L_v = 0$

(posledný prípad odpovedá tzv. *bifilárnym* cievkam)

Pre *paralelne viazané* cievky platí

$$L_v = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

($\pm$ pri nerovnakej/rovnakej orientácii vinutia $\mathcal{I}_I$)

Nech $L_1 = L_2 = L$, potom $M = k\sqrt{L_1 L_2} = kL$ a $L_v = ... = \frac{L}{2}\frac{1-k^2}{1\pm k}$

Ak $k = 0$ - cievky nie sú vo väzbe - $L_v = \frac{L}{2}$

Ak $k = 1$ - dokonalá väzba: pre $\uparrow\uparrow$ $L_v = \lim_{k\to 1} \frac{1-k^2}{1-k}\frac{L}{2} = L$

pre $\uparrow\downarrow$ $L_v = \frac{1-1}{1+1}\frac{L}{2} = 0$

(šípky symbolizujú smer vinutia cievok na obr.)

Ak sú cievky v ideálnej magnetickej väzbe (ideálny transformátor - dá sa skonštruovať napr. spoločným feromagnetickým jadrom), potom oboma cievkami preteká ten istý magnetický tok Φ. Pri vstupnom napätí $\mathcal{U}_1(t)$ na primárnej cievke s n_1 závitmi pre magnetický tok platí

$$\mathcal{U}_1(t) = -n_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

a na svorkách sekundárnej cievky s n_2 závitmi sa v dôsledku časovej zmeny tohto magnetického toku indukuje napätie

$$\mathcal{U}_2(t) = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} = \underline{\frac{n_2}{n_1}\mathcal{U}_1(t)} = p\mathcal{U}_1(t)$$

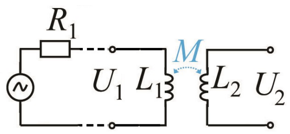
Prúdy v primárnom i sekundárnom obvode sú vo fáze s magnetickým tukom vo vinutiach transformátora, ktorý je zasa fázovo posunutý o $\pi/2$ voči napätiam, napätia $\mathcal{U}_1(t)$, $\mathcal{U}_2(t)$ sú teda navzájom vo fáze alebo posunuté o π, podľa vzájomného smeru vinutia.

Pri zanedbaní strát sa celý výkon z primárneho obvodu transformuje do sekundárneho obvodu

$$\mathcal{U}_1(t)\mathcal{I}_1(t) = \mathcal{U}_2(t)\mathcal{I}_2(t)$$

a teda prúd sa transformuje v opačnom pomere napätí $\mathcal{I}_2(t) = \frac{1}{p}\mathcal{I}_1(t)$

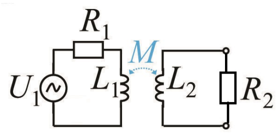
Pri harmonickom budení (ideálneho) transformátora s *nezaťaženým* sekundárnym obvodom (naprázdno, $\mathcal{I}_2 = 0$) pre transformáciu napätí platí



$$\mathcal{U}_1 = L\frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = i\omega L\mathcal{I}_1 \qquad \mathcal{U}_2 = M\frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = i\omega M\mathcal{I}_1$$

$$\frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1} = p \qquad (k = 1)$$

V reálnom zapojení so zaťaženým sekundárnym obvodom (podľa 2. Kirchhoffovho zákona) platí



$$\mathcal{U}_1 = (R_1 + i\omega L_1)\mathcal{I}_1 + i\omega M\mathcal{I}_2$$
$$0 = i\omega M\mathcal{I}_1 + (R_2 + i\omega L_2)\mathcal{I}_2$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostávame vstupnú záťaž "z pohľadu" zdroja signálu

$$Z_{vst} = \frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_1} ... = R_1 + \frac{i\omega L_1 R_2}{R_2 + i\omega L_2} \cong R_1 + R_2\frac{L_1}{L_2} = \underline{R_1 + \frac{R_2}{p^2}} \qquad (R_2 \ll \omega L_2)$$

Záťaž sekundárneho obvodu transformátora R_2 sa teda transformuje do jeho *vstupného* odporu v pomere $1/p^2$. Táto vlastnosť sa využíva pri výkonovom prispôsobovaní systémov.

4.1.5 Reálne pasívne dvojpóly

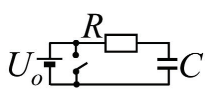
*Jedno*parametrové pasívne dvojpóly sú idealizáciou. Reálne rezistory, kondenzátory a cievky disponujú, vo väčšej či menšej miere, všetkými tromi parametrami R, C, L.
Reálny rezistor, ako vodič, má svoju (parazitnú) kapacitu (schopnosť elektricky sa nabiť voči nulovému potenciálu), a prúd ním pretekajúci je zdrojom magnetického poľa (malá sériová indukčnosť).
Každý reálny kondenzátor má (malý) zvodový prúd, a ktorý modelujeme paralelným odporom. Vodivostný prúd prívodnými vodičmi aj posuvný prúd v objeme (dielektriku) kondenzátora sú rovnocennými zdrojmi magnetického poľa.
Reálna cievka je vinutá z vodiča, má teda nezanedbateľný odpor (v sérii s indukčnosťou), a rovnako má parazitnú kapacitu.

Linearita vyššie opísaných prvkov má takisto svoje (väčšie či menšie) obmedzenia. Reálny rezistor sa napr. prechodom prúdu zahrieva jouleovským teplom, čím sa mení jeho odpor, teda $R = R(\mathcal{I})$. Indukčnosť cievky s magnetickým jadrom je zas lineárna len v oblasti linearity magnetizačnej krivky jadra.

4.2 PRECHODOVÉ JAVY V R-C-L OBVODOCH - PRECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

Funkciu pasívnych prvkov R, C, L v elektronických obvodoch možno dobre pochopiť zo štúdia *prechodových javov* v tých to obvodoch: Vo všetkých nižšie uvedených prípadoch môžeme príslušný systém (obvod) vnímať ako dvojbránu (štvorpól), kde vstupnou bránou je dvojica pólov, na ktoré privádzame napäťový skok U_0, a výstupnú bránu definuje vybrané "výstupné" napätie (napr. $\mathcal{U}_C$), ktoré súčasne predstavuje (po znormovaní na U_0) odozvu systému na jednotkový skok - *prechodovú* charakteristiku systému v časovej oblasti $g(t)$.

4.2.1 RC obvod



Po rozopnutí spínača sa kondenzátor nabíja prúdom $\mathcal{I}$

$$U_0 = \mathcal{U}_R + \mathcal{U}_C = \mathcal{I}R + \frac{1}{C}\int \mathcal{I}dt \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\mathcal{I}}{dt} + \frac{1}{RC}\mathcal{I} = 0$$

ansatz $\mathcal{I} = I_0 e^{\alpha t}$:

$$\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \qquad \underline{\alpha = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}} \qquad \underline{\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{-t/\tau}}$$

$\mathcal{I}_0$ z poč. podm. pre $t=0$: $\mathcal{U}_C = 0$ $\qquad \mathcal{U}_R = I_0 R = U_0$ $\qquad \underline{\mathcal{I}(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}}$

$$\mathcal{U}_R(t) = R\mathcal{I}(t) = \underline{U_0 e^{-t/\tau}} \qquad \mathcal{U}_C(t) = U_0 - \mathcal{U}_R(t) = \underline{U_0(1-e^{-t/\tau})}$$

Zánikom nabíjacieho prúdu sa napätie na kondenzátore *ustáli*.

Ak by $R \to 0$, $I_0 \to \infty$, $\tau \to 0$ - kondenzátor by sa nabil "nekonečne veľkým prúdom nekonečne rýchlo" $\Rightarrow R$ limituje prúd (určuje dobu nabíjania).

Pri nabíjaní kondenzátora C cez odpor R zdroj (napätia U_0) *postupne* odovzdáva do záťaže energiu

$$E(t) = \int_0^t U_0 \mathcal{I}(t')dt' = CU_0 \int_0^t \frac{d\mathcal{U}_C}{dt'}dt' = CU_0 \int_0^{\mathcal{U}_C(t)} d\mathcal{U}_C = CU_0\mathcal{U}_C(t) = CU_0^2\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

a *úhrnná* energia odobraná zdroju (počas celého nabíjania) je

$$E(\infty) = U_0 \int_0^\infty \mathcal{I}(t)dt = ... = CU_0^2$$

Časť tejto energie sa na odpore R premieňa na teplo

$$E_R(t) = \int_0^t \mathcal{U}_R(t')\mathcal{I}(t')dt' = R\int_0^t \mathcal{I}^2(t')dt' = \frac{CU_0^2}{2}\left(1-e^{-2t/\tau}\right)$$

pričom *úhrnná* energia premenená na teplo je

$$E_R(\infty) = R\int_0^\infty \mathcal{I}^2(t)dt = ... = \frac{CU_0^2}{2}$$

a zvyšná časť sa *postupne* akumuluje v kondenzátore

$$E_C(t) = \int_0^t \mathcal{U}_C(t')\mathcal{I}(t')dt' = C\int_0^{\mathcal{U}_C(t)} \mathcal{U}_C d\mathcal{U}_C = \frac{CU_0^2}{2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)^2$$

pričom *úhrnná* akumulovaná energia je

$$E_C(\infty) = \frac{CU_0^2}{2}$$

(v každom okamihu platí $E(t) = E_R(t) + E_C(t)$)

Pri nabíjaní kondenzátora sa teda *polovica* celkovej dodanej energie premení na teplo na odpore!

Po zopnutí spínača sa kondenzátor vybíja cez R

$$0 = R\mathcal{I} + \frac{1}{C}\int \mathcal{I}(t)dt \qquad \frac{d\mathcal{I}}{dt} + \frac{\mathcal{I}}{\tau} = 0$$

Tá istá rovnica ako pri nabíjaní C ale iné poč. podmienky:
$t=0$: $\quad \mathcal{U}_C = U_0$, $\mathcal{U}_R = -\mathcal{U}_C$

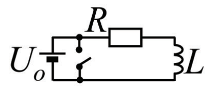
$$\underline{\mathcal{I}(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}} \qquad \underline{\mathcal{U}_R(t) = -U_0 e^{-t/\tau} = -\mathcal{U}_C(t)}$$

Energia premenená na odpore na teplo *počas celého vybíjania* kondenzátora je

$$E_R = \int_0^\infty R\mathcal{I}^2(t)dt = \frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{\tau U_0^2}{2R} = \frac{1}{2}CU_0^2 = E_C$$

Celá akumulovaná energia (elektrického poľa) v kondenzátore sa teda premení na teplo na odpore.

4.2.2 RL obvod



Po rozopnutí spínača tečie obvodom prúd $\mathcal{I}$.
Bez cievky prúd *okamžite* nadobudne hodnotu $\frac{U_0}{R}$.

Nárast prúdu (a magnetického poľa) v cievke vyvolá napätie $-\mathcal{U}_i$, ktoré *spomaľuje* nárast prúdu.

$$L\frac{d\mathcal{I}}{dt} + R\mathcal{I} = U_0$$

Ansatz $\mathcal{I}(t) = Ae^{\alpha t}$ nevykompenzuje časovo nezávislý člen U_0 .
Ansatz $\mathcal{I}(t) = A_1 + A_2e^{\alpha t}$ vyhovuje len ak

$$A_1 = \frac{U_0}{R} \qquad\qquad LA_2\alpha = -RA_2 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}}$$

A_2 je dané poč. podmienkou pre $t = 0 : \mathcal{I} = 0 \;\Rightarrow\; A_2 = -A_1$

$$\underline{\mathcal{I}(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\mathcal{U}_R(t) = R\mathcal{I}(t) = \underline{U_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \qquad\qquad \mathcal{U}_L(t) = L\frac{d\mathcal{I}}{dt} = U_0 - \mathcal{U}_R = \underline{U_0e^{-t/\tau}}$$

Napätie na cievke *zanikne* po ustálení prúdu.

Ak $R \to 0$, $\tau \to \infty$ - prúd sa neustáli ale *neohraničene rastie* - R limituje prúd.

Energia postupne dodaná zdrojom do záťaže je

$$E(t) = \int_0^t U_0\mathcal{I}(t')dt' = ... = \frac{U_0^2}{R}\left[t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right] \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{U_0^2}{R}(t - \tau)$$

Táto energia sa rozloží medzi odpor a cievku

$$E_R(t) = \int_0^t R\mathcal{I}^2(t')dt' = ... = \frac{U_0^2}{R}\left[t + \tau\left(2e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}e^{-2t/\tau} - \frac{3}{2}\right)\right] \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{U_0^2}{R}\left(t - \frac{3}{2}\tau\right)$$

$$E_L(t) = \int_0^t L\mathcal{I}(t')\frac{d\mathcal{I}(t')}{dt'}dt' = ... = \frac{U_0^2}{R}\tau\left[\left(\frac{1}{2}e^{-2t/\tau} - e^{-t/\tau} + \frac{1}{2}\right)\right] \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2}LI_0^2$$

Ustálením prúdu (na hodnote I_0) ustane aj dodávka energie do cievky (ustálené magnetické pole), a ďalej dodávaná energia zo zdroja sa *celá spotrebováva* na odpore.

Po zopnutí spínača prúd kvôli indukčnosti zaniká *postupne*

$$L\frac{d\mathcal{I}}{dt} + R\mathcal{I} = 0 \qquad\qquad t = 0 \;:\; \mathcal{U}_R = U_0$$

$$\underline{\mathcal{I}(t) = I_0e^{-t/\tau}} \qquad\qquad \underline{\mathcal{U}_R(t) = U_0e^{-t/\tau} = -\mathcal{U}_L(t)}$$

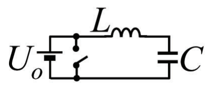
Energia premenená na odpore na teplo *počas zanikania prúdu* je

$$E_R = \int_0^\infty R\mathcal{I}^2(t)dt = \frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{\tau U_0^2}{2R} = \frac{1}{2}LI_0^2 = E_L$$

Celá energia magnetického poľa v cievke sa premení na teplo na odpore.

Pozor: Nesmie dôjsť ku *skokovej* zmene prúdu náhlym prerušením obvodu - nekontrolovateľne veľké indulované napätie $L\frac{d\mathcal{I}}{dt}$ na cievke môže viesť k zapáleniu oblúkového výboja - ochranou je napr. trvalé premostenie RL-člena paralelným odporom R_p ($\gg R$).

4.2.3 LC obvod



Po rozopnutí spínača sa prúdom $\mathcal{I}$ kondenzátor nabíja nábojom $q(t) = \int_0^t \mathcal{I}(t')dt'$, pričom cievka bráni zmene prúdu

$$U_0 = L\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t \mathcal{I}(t')dt' \qquad\qquad \frac{d^2\mathcal{I}(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}\mathcal{I}(t) = 0$$

ansatz $\mathcal{I}(t) = A\cos\omega_0 t$:

$$-\omega_0^2 A + \frac{1}{LC}A = 0 \qquad\qquad \underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

A určíme z poč. podmienky pre $t = 0$: $\quad \mathcal{I}(0) = A\cos 0 = A = 0 \qquad$ *nezmysel!*

Principiálna chyba : Homogénna dif. rovnica 2. rádu na úplné riešenie vyžaduje 2 počiatočné podmienky - ansatz teda musí obsahovať *2 voľné parametre* (na vyhovenie 2 poč. podmienkam).

ansatz $\mathcal{I}(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$:

1. poč. podmienka pre $t = 0$: $\quad \mathcal{I}(0) = A\cos\varphi_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}}$

2. poč. podmienka pre $t = 0$: $\quad \mathcal{U}_C(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{U}_L(0) = L\left(\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt}\right)_{t=0} = -LA\omega = U_0$

$$\Rightarrow\quad \underline{A = -\frac{U_0}{\omega_0 L} = -I_0}$$

$$\mathcal{I}(t) = -I_0\cos(\omega_0 t + \pi/2) = \underline{I_0\sin\omega_0 t}$$

$$\mathcal{U}_L(t) = -\omega_0 LA\sin(\omega_0 t + \pi/2) = \underline{U_0\cos\omega_0 t} \qquad\qquad \mathcal{U}_C(t) = U_0 - \mathcal{U}_L(t) = \underline{U_0(1-\cos\omega_0 t)}$$

Prúd aj napätia na cievke a kondenzátore majú netlmený oscilačný charakter s frekvenciou ω_0.

Energia akumulovaná v cievke a kondenzátore je

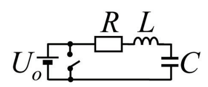
$$E_L(t) = \frac{1}{2}L\mathcal{I}^2(t) = \frac{1}{2}CU_0^2\sin^2\omega_0 t \qquad\qquad E_C(t) = \frac{1}{2}C\mathcal{U}_C^2(t) = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2\omega_0 t$$

Celková energia dodaná zo zdroja je

$$E(t) = E_L(t) + E_C(t) = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Po prvom nabití kondenzátora už táto energia nezávisí od času (nerastie) - následným zopnutím spínača možno zdroj odpojiť a energia ostane akumulovaná v obvode, každú $\frac{1}{4}$-periódu dôjde k cyklickej premene E_C na E_L alebo naopak.

4.2.4 RLC obvod



Obdobný proces ako v predchádzajúcom prípade, na odpore však dochádza k dissipácii energie.

$$U_0 = L\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t \mathcal{I}(t')dt' + R\mathcal{I}(t) \qquad\qquad \frac{d^2\mathcal{I}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\mathcal{I}(t) = 0$$

ansatz $\mathcal{I}(t) = Ae^{\alpha t}$:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \qquad \underline{\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} = \frac{1}{\tau} \pm \beta$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2} \qquad \underline{\tau = \frac{2L}{R}} \qquad \underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

Všeobecným riešením je $\qquad \mathcal{I}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$

poč. podmienky pre $t = 0$:

$$\mathcal{I}(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = -A_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U}_C(0) = 0 \\ \mathcal{U}_R(0) = 0 \text{ lebo } \mathcal{I}(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_L(0) = L\left(\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt}\right)_{t=0} = L\alpha_1 A_1 + L\alpha_2 A_2 = U_0$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = \frac{U_0}{2\beta L} \qquad \underline{\mathcal{I}(t) = \frac{U_0}{\beta L} e^{-t/\tau} \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}}$$

- ak $\frac{1}{\tau} > \omega_0$, tj. $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, potom $\beta^2 > 0$ $\qquad \underline{\mathcal{I}(t) = \frac{U_0}{\beta L} e^{-t/\tau} \sinh \beta t}$

- ak $\frac{1}{\tau} = \omega_0$, tj. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, potom $\beta = 0$ $\qquad \underline{\mathcal{I}(t) = \frac{U_0}{\beta L} t e^{-t/\tau}}$ - *kritické tlmenie*

V oboch prípadoch prúd *aperiodicky* zanikne a napätie na kondenzátore sa ustáli na U_0.

- ak $\frac{1}{\tau} < \omega_0$, tj. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, potom $\beta^2 < 0$ $\qquad \beta = i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} = i\omega_\gamma$

$$\underline{\mathcal{I}(t) = \frac{U_0}{L\omega_\gamma} e^{-t/\tau} \frac{e^{i\omega_\gamma t} - e^{-i\omega_\gamma t}}{2i} = \frac{U_0}{L\omega_\gamma} e^{-t/\tau} \sin \omega_\gamma t}$$

Prúd zaniká *tlmenými periodickými osciláciami.*

Celková energia (po ustálení prechodového javu) dodaná zdrojom do obvodu sa delí na energiu nabitého kondenzátora a teplo uvoľnené na odpore

$$E(\infty) = \frac{CU_0^2}{2} + \int_0^\infty R\mathcal{I}^2(t)dt = ... = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{\tau^2 U_0^2}{2L(1 + \omega_\gamma^2 \tau^2)} = ... = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2}$$

Energia premenená na odpore na teplo je teda opäť rovná energii akumulovanej v kondenzátore - tento výsledok (počítaný pre tlmený periodický priebeh) je *rovnaký pre všetky* priebehy $\mathcal{I}(t)$.

Obdobné výsledky dostaneme aj pre vybíjanie kondenzátora.

4.3 IMPULZNÁ A PRENOSOVÁ CHARAKTERISTIKA V R-C-L OBVODOCH

Keďže δ-impulz predstavuje deriváciu jednotkovej skokovej funkcie $u(t)$, rovnaký vzťah platí aj pre ich systémové odozvy. Pre všetky vyššie uvedené príklady môžeme preto následným derivovaním (podľa času) *prechodovej* charakteristiky $g(t)$ príslušného systému (obvodu) získať jeho *impulznú* charakretistiku $h(t)$.

Je prirodzené zvoliť pre jednotkový skok, resp. δ-impulz na vstupe systému čas $t = 0$, a preto (v zmysle princípu kauzality) impulzná odozva $h(t)$ je definovaná pre $t \geq 0$. Pri určovaní *prenosovej* charakteristiky systému $H(i\omega)$ z impulznej pomocou FT však potrebujeme mať $h(t)$ definované pre $t \in (-\infty, \infty)$, pri derivovaní $\frac{dg(t)}{dt} \to h(t)$ treba preto postupovať dôsledne, najma v bode $t = 0$.

4.3.1 RC obvod

Podľa predchádzajúcej kapitoly

$$g(t) = \frac{\mathcal{U}_C(t)}{U_0} = (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{pre} \quad t \geq 0 \quad \text{a} \quad g(t) = 0 \quad pre \quad t < 0$$

čo pomocou skokovej funkcie $u(t)$ možno vyjadriť ako

$$g(t) = u(t)(1 - e^{-t/\tau}) \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

Jej derivovaním podľa času dostávame

$$h(t) = \delta(t)(1 - e^{-t/\tau}) + u(t)\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

Jasná fyzikálna (tj. *praktická*) interpretácia sa pritom týka iba druhého člena. Prvý člen je však dôležitý pre potreby korektnej FT $h(t) \to H(i\omega)$. (Ak však funkcia $g(t)$ v $t = 0$ rastie z nuly *spojite* - ako v tomto prípade, opomenutie $u(t)$, a teda aj 1. člena $h(t)$, nie je chybou, ako hneď uvidíme.)

Prenosovú charakteristiku $H(i\omega)$ získame z $h(t)$ pomocou FT

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \left(1 - e^{-t/\tau}\right) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{\tau} \int_{0}^{\infty} e^{-t/\tau} e^{-i\omega t} dt$$

V prvom člene δ-funkcia "vylúpne" funkčnú hodnotu podintegrálneho výrazu pre $t = 0$, čo je 0, a v druhom člene $u(t)$ "oreže" dolnú hranicu integrovania. Štandardnou technikou integrovania dostávame

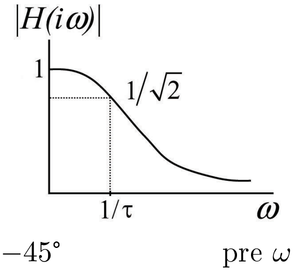
$$H(i\omega) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} = \underline{\frac{1}{1 + i\omega\tau}}$$

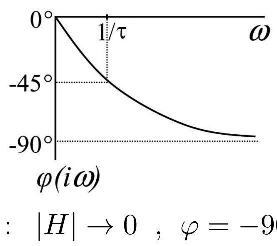
Pre modul a fázu $H(i\omega)$ platí

$\underline{|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}}$

$\underline{\varphi(i\omega) = \arctan(-\omega\tau)}$

$RC = \tau$ - časová konštanta





pre $\omega = 1/\tau$: $|H| = K/\sqrt{2}$, $\varphi = -45°$ pre $\omega \to \infty$: $|H| \to 0$, $\varphi = -90°$

Fyzikálna interpretácia týchto výsledkov je nasledovná: Pre pomalé deje (nízke frekvencie) sa kondenzátor javí ako rozpojený obvod, a teda prenos napätia zo vstupu na výstup cez rezistor je dokonalý ($\to 1$). Odpor tiež nevnáša žiaden fázový posuv ($\varphi \to 0$). Pre vysoké frekvencie kondenzátor predstavuje skrat výstupného napätia - prenos klesá k nule. Výstupné napätie na kondenzátore vždy zaostáva za napájaním.
Zrejmý je aj súvis medzi frekvenčnou charakteristikou a vyššie skúmanou prechodovou charakteristikou: Pri prechodovom jave sa výstupné napätie ustaľuje len postupne - táto zotrvačnosť preferuje prenos pomalých dejov a potláča prenos rýchlych dejov.

4.3.2 RL obvod

Podľa predchádzajúcej kapitoly

$$g(t) = \frac{\mathcal{U}_L(t)}{U_0} = u(t)e^{-t/\tau} \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

a

$$h(t) = \delta(t)e^{-t/\tau} - u(t)\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

Funkcia $g(t)$ má v bode $t = 0$ nespojitý charakter, opomenutie $u(t)$ by tu znamenalo fatálnu chybu. Pre $H(i\omega)$ dostávame

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-t/\tau}e^{-i\omega t}dt - \frac{1}{\tau}\int_{0}^{\infty} e^{-t/\tau}e^{-i\omega t}dt$$

Prvý člen tentokrát dá $\left(e^{-t/\tau}e^{-i\omega t}\right)_{t=0} = 1$, a teda

$$H(i\omega) = 1 - \frac{1}{1+i\omega\tau} = \underline{\frac{1}{1+\frac{1}{i\omega\tau}}}$$

$\underline{|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{\omega\tau})^2}}}$ $\qquad$ $\underline{\varphi(i\omega) = \arctan(\frac{1}{\omega\tau})}$ $\qquad$ $\frac{L}{R} = \tau$ - časová konštanta

Frekvenčný charakter prenosu je opačný ako v predchádzajúcom prípade: Prenos napätia je úplný pre vysoké frekvencie a klesá k nule pre nízke frekvencie. Rovnako fázový posuv je výrazný pri nízkych frekvenciách, je však kladný (výstupné napätie predbieha vstup). Fyzikálna interpretácia je aj v tomto prípade zrejmá: Cievka sa chová ako skrat pri nízkych frekvenciách - skratuje teda výstup. Pre vysoké frekvencie sa cievka javí ako rozpojený obvod, a teda prenos napätia zo vstupu na výstup cez rezistor je dokonalý a bez fázového posuvu. Indukované (výstupné) napätie na cievke vždy predbieha budenie.
Aj korelácia s prechodovou charakteristikou je zrejmá: Pri prechodovom jave indukované napätie na cievke vzniká "okamžite" a zaniká postupne - preferovaný je teda prenos rýchlych dejov.

4.3.3 RLC obvod

Podľa predchádzajúcej kapitoly je

$$g(t) = \frac{u(t)\mathcal{U}_C(t)}{U_0} = \frac{u(t)}{U_0 C}\int_0^t \mathcal{I}(t')dt' = u(t)\frac{\omega_0^2}{2\beta}\int_0^t e^{-t'/\tau}\left(e^{\beta t'} - e^{-\beta t'}\right)dt'$$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \delta(t)A(t) + u(t)\frac{\omega_0^2}{2\beta}e^{-t/\tau}\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right)$$

kde (integrovaním per partes)

$$A(t) = \frac{\omega_0^2}{2\beta}\int_0^t e^{-t'/\tau}\left(e^{\beta t'} - e^{-\beta t'}\right)dt' = ... = \frac{\omega_0^2}{2\beta}\left(\frac{1-e^{-t/\tau}e^{\beta t}}{\frac{1}{\tau}-\beta} - \frac{1-e^{-t/\tau}e^{-\beta t}}{\frac{1}{\tau}+\beta}\right)$$

Prvý člen FT $h(t) \to H(i\omega)$ "vylúpne" $A(0) = 0$ (plynulý nábeh $\mathcal{U}_C(t)$ v $t = 0$ v prechodovej odozve), a

$$H(i\omega) = \frac{\omega_0^2}{2\beta}\int_0^\infty e^{-t/\tau}\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right)e^{-i\omega t}dt = ...$$

$$... = \frac{\omega_0^2}{2\beta}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau}-\beta+i\omega} + \frac{1}{\frac{1}{\tau}+\beta+i\omega}\right) = \underline{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega}}$$

kde $\gamma = 1/\tau = R/2L$ a $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\omega_\gamma$. Pre modul a fázu $H(i\omega)$ platí

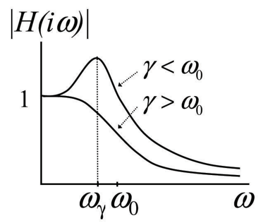
$$\underline{|H(i\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}} \qquad \underline{\varphi = -\arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

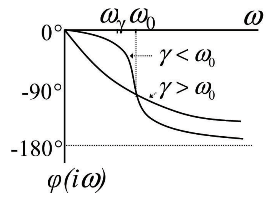
$\omega = 0 : |H| = 1 \ , \ \varphi = 0$

$\omega \to \infty : |H| \to 0 \ , \ \varphi \to -180$

$\omega = \omega_0 : |H| = \frac{\omega_0}{2\gamma} \ , \ \varphi = -90$

$max\{|H(i\omega)|\} : \frac{d|H(i\omega)|}{d\omega} = 0 :$





$$\underline{\omega_{max} = \omega_\gamma = \omega_0 \sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}} \qquad |H(i\omega)|_{max} = \frac{\omega_0}{2\gamma\sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}}$$

Prenos tohto systému má teda *rezonančný* charakter v okolí ω_γ, ak $\gamma < \omega_0$, tj. ak tlmenie je malé. Takýto obvod prednostne prepúšťa signály v istom intervale frekvencií. Ak $\gamma > \omega_0$, systém je *pretlmený* - nenastáva rezonancia a systém sa chová podobne ako vyššie skúmaný RC obvod.

Systémy, ktoré selektívne prepúšťajú istú časť spektra, kým zvysnú časť spektra potlačujú, nazývame **filtre**. Viac o filtroch v Dodatku D.

4.4 IMPEDANCIA LINEÁRNYCH PASÍVNYCH PRVKOV A OBVODOV

4.4.1 Impedancia

Na lineárne pasívne jednobrány (dvojpóly) R, C, L môžeme použiť *dvoj*bránový opis - pri stotožnení vstupnej a výstupnej brány - za predpokladu, že vstupným signálom je prúd a výstupným signálom napätie, alebo naopak. V časovej oblasti majú vzťahy medzi vstupným a výstupným signálom tvar

$$\mathcal{U}(t) = R\mathcal{I}(t) \qquad \mathcal{U}(t) = \frac{1}{C}\int \mathcal{I}(t)dt \qquad \mathcal{U}(t) = L\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt}$$

resp.

$$\mathcal{I}(t) = G\mathcal{U}(t) = \frac{1}{R}\mathcal{U}(t) \qquad \mathcal{I}(t) = C\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} \qquad \mathcal{I}(t) = \frac{1}{L}\int \mathcal{U}(t)dt$$

Prechodom od časovej k frekvenčnej analýze (FT) pre fourierovské obrazy vstupného a výstupného signálu platia vzťahy

$$U(\omega) = Z(\omega)I(\omega) \qquad \text{resp.} \qquad I(\omega) = Y(\omega)U(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}U(\omega)$$

kde $Z(\omega)$ - **impedancia**, resp. $Y(\omega)$ - **admitancia**, sú príslušné *frekvenčné* (prenosové) charakteristiky "systému", ktoré pre jednotlivé (ideálne) pasívne prvky majú tvar (v konvencii E)

$$Z_R(\omega) = \frac{1}{Y_R(\omega)} = R \qquad Z_C(\omega) = \frac{1}{Y_C(\omega)} = \frac{1}{i\omega C} \qquad Z_L(\omega) = \frac{1}{Y_L(\omega)} = i\omega L$$

(Poznámka: Časové priebehy signálov odlišujeme od ich fourierovských obrazov typom písma, napr. $\mathcal{U}(t) \leftrightarrow U(\omega)$)

Treba zdôrazniť, že vzťahy typu $U(\omega) = Z(\omega)I(\omega)$ neplatia pre celkové signály $\mathcal{U}(t), \mathcal{I}(t)$, ale len pre ich *harmonické* spektrálne zložky *na príslušnej frekvencii* ω. Len pre *čisto harmonické* priebehy signálov (napr. pri harmonickom napájacom prúde $\mathcal{I}(t) = I_0 e^{i\omega t}$ môžeme pre prúd a napätie na R, C a L písať

$$\mathcal{U}(t) = Z(\omega)\mathcal{I}(t) \qquad \mathcal{U}_C(t) = \frac{1}{C}\int \mathcal{I}(t)dt = \frac{1}{i\omega C}\mathcal{I}(t) \qquad \mathcal{U}_L(t) = L\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = i\omega L\mathcal{I}(t)$$

Impedancia (na danej frekvencii) je teda definovaná ako $\underline{Z(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = \left(\frac{\mathcal{U}(t)}{\mathcal{I}(t)}\right)_\omega}$

Ak je $Z(\omega)$ *reálne* - **rezistancia** - prúd a napätie sú *vo fáze* - rezistancia reprezentuje *straty energie.*

Ak $Z(\omega)$ je *rýdzo imaginárne* - **reaktancia** - prúd a napätie sú navzájom fázovo posunuté o $\frac{\pi}{2}$ - nedochádza teda ku stratám energie, reaktancia reprezentuje *akumuláciu* energie, a teda zotrvačný charakter daného prvku.

$Z_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}e^{-i\pi/2}$ napätie *zaostáva* za prúdom o $\frac{\pi}{2}$

$Z_L(\omega) = \omega L e^{i\pi/2}$ napätie *predbieha* prúd o $\frac{\pi}{2}$

Impedancie lineárnych pasívnych prvkov skladáme (ako odpory) do *výslednej* impedancie, napätím a prúdom potom (v ďalšom texte) rozumieme napätie a prúd na/do *výslednej* impedancii - ľubovoľne zložitá impedancia predstavuje *lineárny dvojpól.*

Vo všeobecnosti (pre ľubovoľnú impedanciu) $\underline{Z = \Re\{Z\} + i\Im\{Z\}}$

$\Re\{Z\}$ - reprezentuje *straty* (premena elektrickej energie na teplo)

$\Im\{Z\}$ - reprezentuje *fázový posun* medzi prúdom a napätím v dôsledku *akumulácie* energie

Pre harmonický prúd platí

$$\mathcal{U}(t) = Z\mathcal{I}(t) = [\Re\{Z\} + i\Im\{Z\}]I_0 e^{i\omega t} = I_0\Re\{Z\}\cos\omega t - I_0\Im\{Z\}\sin\omega t + [\text{imag. časť}]$$

Prvá zložka (reálneho) napätia ($\sim$ cos) je vo fáze s (reálnym) prúdom ($I_0 \cos\omega t$).

Druhá zložka (reálneho) napätia ($\sim$ sin) je posunutá voči (reálnemu) prúdu o $\frac{\pi}{2}$.

Celkové (reálne) napätie je posunuté voči (reálnemu) prúdu o uhol $\underline{\vartheta = \arctan\frac{\Im\{Z\}}{\Re\{Z\}}}$.

Na zamyslenie: Fyzikálny význam komplexných veličín, komplexné veličiny pri výpočte energie.

Okamžitý výkon je

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{U}(t)\mathcal{I}(t) = I_0^2\Re\{Z\}\cos^2\omega t - I_0^2\Im\{Z\}\cos\omega t\sin\omega t$$

Prvý člen je vždy *kladný* a znamená výkon *jednostranne* odoberaný zo zdroja do *rezistívnej* záťaže $\Re\{Z\}$. Druhý člen počas periódy *mení znamienko* a znamená *vratnú* výmenu energie medzi zdrojom a *reaktívnou* záťažou $\Im\{Z\}$. *Stredný* výkon za periódu je

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{U}(t)\mathcal{I}(t)dt = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2\Re\{Z\}\cos^2\omega t dt}_{\frac{1}{2}I_0^2\Re\{Z\}} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2\Im\{Z\}\cos\omega t\sin\omega t dt}_{0}$$

$\langle\mathcal{P}\rangle \sim \Re\{Z\}$ - **užitočný (činný) výkon**

Celková energetická bilancia za periódu na reaktancii $\Im\{Z\}$ je teda nulová - **jalový výkon**.

Pri *prúdovom* budení (konštantná amplitúda prúdu) je teda *reálna* časť impedancie systému priamo mierou *nevratnej absorpcie* energie v systéme, a jej imaginárna časť je mierou *vratnej akumulácie* energie v systéme. (Toto tvrdenie stráca zmysel ak $Z(i\omega) \to \infty$, keď je podmienka konštantnej amplitúdy prúdu nerealizovateľná.)
Pri *napäťovom* budení (konštantná amplitúda napätia) sú mierou absorpcie, resp. akumulácie energie výrazy $\frac{\Re\{Z\}}{|Z|^2}$, resp. $\frac{\Im\{Z\}}{|Z|^2}$. (Toto tvrdenie opäť stráca zmysel ak $Z(i\omega) \to 0$, keď je napäťové napájanie nerealizovateľné.)

Treba pripomenúť, že funkčné závislosti $\Re\{Z(\omega)\}$ a $\Im\{Z(\omega)\}$ pre impedanciu ľubovoľného systému *nie sú navzájom nezávislé*, ale spĺňajú Kramersove-Kronigove vzťahy.

V laplaceovskej reprezentácii hovoríme o **operačnej impedancii** pasívnych prvkov

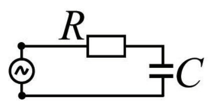
odpor R: $u(t) = Ri(t)$, $U(s) = Z(s)I(s)$, $Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = R$

cievka L: $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$, $U(s) = LsI(s) - Li(0)$, $Z(s) = sL$
pre nulovú počiatočnú akumuláciu energie

kondenzátor C: $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$, $U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{sC}Cu(0)$, $Z(s) = \frac{1}{sC}$
pre nulovú počiatočnú akumuláciu energie

Pri nenulových počiatočných podmienkach (nenulovej energii naakumulovanej v reaktívnych prvkoch) pribudne teda *v sérii* k impedancii $Z(s)$ zdroj napätia (ekvivalentný akumulovanej energii) $Li(0)$, resp. $u(0)/s$.

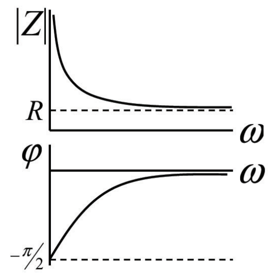
4.4.2 RC obvod



$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Pozn.: Uvedený vzťah pre impedanciu môžeme vnímať aj ako FT časovej dif. rovnice

$$\mathcal{U}(t) = R\mathcal{I}(t) + \frac{1}{C}\int \mathcal{I}(t)dt \quad \leftrightarrow \quad U(\omega) = RI(\omega) + \frac{1}{i\omega C}I(\omega) \qquad Z(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)}$$



Pre impedanciu $Z = |Z|e^{i\varphi}$ platí

$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$ $\quad \tan\varphi = \frac{-1}{\omega RC}$

Fázový posuv určuje, že napätie zaostáva za prúdom o $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

$\omega \to 0: \quad Z \to \infty \qquad \omega \to \infty : Z \to R$

Pri *napäťovom* budení (fixovaná amplitúda vstupného napätia U_0) bude amplitúda prúdu $I_0 = \frac{U_0}{|Z|}$ a jej frekvenčná závislosť bude daná $|Z(\omega)|$.

$\omega \to 0: \quad I_0 \to 0 \qquad \omega \to \infty : I_0 \to \frac{U_0}{R}$

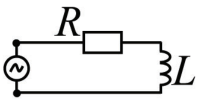
Straty (za periódu T) na odpore budú kopírovať frekvenčnú závislosť prúdu. *Maximálna* naakumulovaná energia v kondenzátore bude mať opačnú tendenciu - s rastúcou amplitúdou prúdu klesá napätie na kondenzátore (lebo rastie úbytok napätia na odpore).

$\omega \to 0: \quad E_R \to 0 \qquad E_C \to \frac{CU_0^2}{2} = \frac{U_0^2}{2R}\tau$

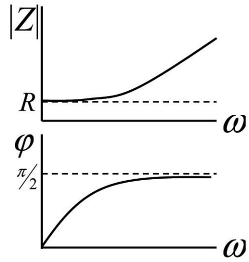
$\omega \to \infty : E_R \to \frac{U_0^2}{2R}T \qquad E_C \to 0$

Znamená to teda, že kondenzátor sa pre vysoké frekvencie harmonického napájania chová voči zdroju ako *skrat*: Počas štvrťperiódy nabíjania/vybíjania sa nestihne nabiť/vybiť - neustále doňho, resp. z neho, a teda celým obvodom, tečie veľký prúd. Naopak, pri nízkych frekvenciach napájania sa v rámci každej štvrťperiódy v krátkom čase (voči štvrťperióde) úplne nabije/vybije a následne prúd obvodom netečie - kondenzátor sa chová ako *rozpojený obvod*.

4.4.3 RL obvod



$$Z = R + i\omega L$$



$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad \tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$

Napätie predbieha prúd o $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

$\omega \to 0: \quad Z \to R \qquad \omega \to \infty : Z \to \infty$

Pri *napäťovom* budení bude amplitúda prúdu klesať s rastúcou frekvenciou (rastúcou induktanciou).

$\omega \to 0: \quad I_0 \to \frac{U_0}{R} \qquad \omega \to \infty : I_0 \to 0$

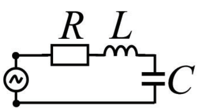
Straty (za periódu T) na odpore aj *maximálna* naakumulovaná energia v cievke budú kopírovať pokles prúdu s frekvenciou.

$\omega \to 0: \quad E_R \to \frac{U_0^2}{2R}T \qquad E_L \to \frac{LU_0^2}{2R^2} = \frac{U_0^2}{2R}T$

$\omega \to \infty : E_R \to 0 \qquad E_L \to 0$

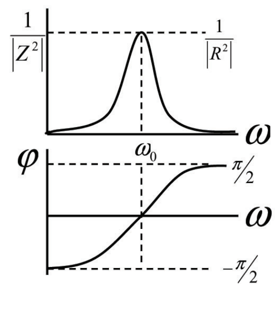
Cievka sa teda pre nízke frekvencie chová ako skrat, a pre vysoké frekcencie ako rozpojený obvod.

4.4.4 RLC obvod



$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + i\omega L\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}$



$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\omega R C}$

$\omega < \omega_0$: *kapacitný* charakter (napätie zaostáva za prúdom)

$\omega > \omega_0$: *induktívny* charakter (napätie predbieha prúd)

$\omega = \omega_0$: *rezonancia* (napätie vo fáze s prúdom)

Napätie na kondenzátore, resp. cievke pritom *vždy* zaostáva, resp. predbieha prúd o $\frac{\pi}{2}$, $\mathcal{U}_C$ a $\mathcal{U}_L$ sú pritom navzájom *v protifáze*. V rezonancii platí $\mathcal{U}_C = -\mathcal{U}_L$ (mimo rezonancie to neplatí).

Časové priebehy budiaceho napätia, prúdu a napätí na jednotlivých prvkoch obvodu sú:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{U}(t) = U_0 e^{i\omega t} & \to & U_0 \cos\omega t \\
\mathcal{I}(t) = \frac{\mathcal{U}(t)}{Z} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\varphi}} = \frac{U_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \varphi)} & \to & \frac{U_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) \\
\mathcal{U}_R(t) = R\mathcal{I}(t) = R\frac{U_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \varphi)} & \to & R\frac{U_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) \\
\mathcal{U}_C(t) = \frac{1}{C} \int \mathcal{I}(t) dt = \frac{U_0}{\omega C |Z|} e^{i(\omega t - \varphi - \pi/2)} & \to & \frac{1}{\omega C} \frac{U_0}{|Z|} \sin(\omega t - \varphi) \\
\mathcal{U}_L(t) = L\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = \frac{\omega L U_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \varphi + \pi/2)} & \to & -\omega L \frac{U_0}{|Z|} \sin(\omega t - \varphi)
\end{array}
$$

Energia akumulovaná, resp. rozptýlená v danom prvku $i = C, L, R$ za daný čas t je $E_i(t) = \int_0^t \mathcal{I}(t')\mathcal{U}_i(t')dt'$, pri výpočte energie však treba prejsť k *reálnym* veličinám.

Je zrejmé, že $E_{C,L}(T) = 0$ aj $E_{C,L}(\frac{T}{2}) = 0$ - za každú polperiódu $\frac{T}{2}$ sa energia cyklicky dodá zo zdroja do C, L aj vráti zdroju.

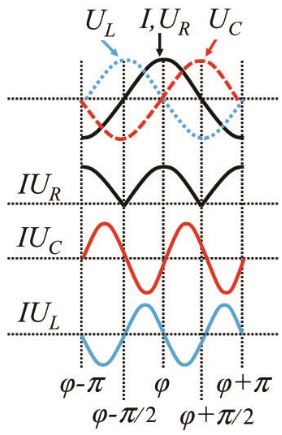
Maximálna akumulovaná energia v C, L je $\left(\int_0^{T/4} dt\right)$:

$$E_{C_{max}} = \frac{U_0^2}{\omega^2 C |Z|^2} \qquad\qquad E_{L_{max}} = \frac{L U_0^2}{|Z|^2}$$

Celková energia *jednostranne* dodaná za periódu zdrojom do obvodu a rozptýlená na odpore je $\left(\int_0^T dt\right)$:

$$E_{max} = \frac{\pi U_0^2}{\omega |Z|} \cos\varphi = \frac{\pi R U_0^2}{\omega |Z|^2} \qquad\qquad E_R = \frac{\pi R U_0^2}{\omega |Z|^2} = E_{max}$$

(pre komplexné č. $a = |a| e^{i\varphi}$ platí $\tan\varphi = \frac{\Im\{a\}}{\Re\{a\}}$, $\cos\varphi = \frac{\Re\{a\}}{|a|}$, $\sin\varphi = \frac{\Im\{a\}}{|a|}$)



Z uvedených výsledkov vidno, že frekvenčná závislosť prúdu a napätí na jednotlivých prvkoch, ako aj akumulovanej a rozptyľovanej energie majú jasne rezonančný charakter ($\sim |Z(\omega)^{-1}|$, resp. $\sim |Z(\omega)^{-2}|$).

Pre pochopenie energetickej výmeny v obvode je vhodnejšie počítať okamžité výkony na jednotlivých prvkoch ($\mathcal{U}_i(t)\mathcal{I}(t)$, $i = C, L, R$) a výkon dodávaný zdrojom ($\mathcal{U}(t)\mathcal{I}(t)$). Pre tieto výpočty je vhodné posunúť fázu o φ :
$\mathcal{I}(t) = \frac{U_0}{|Z|} \cos\omega t$, $\mathcal{U}(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$\mathcal{U}_R(t)\mathcal{I}(t) = R\frac{U_0^2}{|Z|^2} \underline{\cos^2\omega t}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathcal{U}_C(t)\mathcal{I}(t) = \frac{1}{\omega C} \frac{U_0^2}{|Z|^2} \cos\omega t \sin\omega t \\
\mathcal{U}_L(t)\mathcal{I}(t) = (-\omega L) \frac{U_0^2}{|Z|^2} \cos\omega t \sin\omega t
\end{array}\right\} [\mathcal{U}_C(t) + \mathcal{U}_L(t)]\mathcal{I}(t) = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \frac{U_0^2}{|Z|^2} \underline{\cos\omega t \sin\omega t}$$

$$\mathcal{U}(t)\mathcal{I}(t) = |Z| \frac{U_0^2}{|Z|^2} \left\{ \cos^2\omega t \overbrace{\cos\varphi} - \cos\omega t \sin\omega t \overbrace{\sin\varphi} \right\} =$$

$$= \frac{U_0^2}{|Z|^2} \left\{ R\underline{\cos^2\omega t} - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \underline{\cos\omega t \sin\omega t} \right\}$$

Jalová zložka výkonu zdroja teda presne odpovedá výkonu na akumulačných prvkoch, a *činná* zložka výkonu zdroja sa celá rozptyľuje na odpore.

Stojí za zmienku, že hoci má energia akumulovaná v kapacite aj indukčnosti ostré maximum pri $\omega \to \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, jalový výkon zdroja práve vtedy klesá k nule (impedancia je čisto reálna) - energia akumulovaná v obvode je maximálna ale nevymieňa sa cyklicky medzi obvodom a zdrojom, len medzi akumulačnými prvkami v obvode - všetok výkon dodaný zdrojom v rezonancii sa rozptýli na odpore.

4.5 URČENIE PRENOSOVÝCH CHARAKTERISTÍK PROSTREDNÍCTVOM IMPEDANCIÍ A SPÄTNÉ URČENIE IMPULZNÝCH CHARAKTERISTÍK

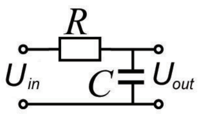
Často je jednoduchšie vyjadriť frekvenčné charakteristiky $R - C - L$ obvodov priamo pomocou impedancii jeho jednotlivých prvkov alebo častí. Vyššie skúmané dvojbrány RC, RL, RLC predstavujú napäťové deliče s napäťovým prenosom (na danej frekvencii)

$$H(i\omega) = \frac{U_{out}(\omega)}{U_{in}(\omega)} = \frac{Z_2 I(\omega)}{(Z_1 + Z_2) I(\omega)} = \frac{Z_2}{(Z_1 + Z_2)}$$

kde napr. pre RC obvod $Z_1 = R$ a $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$, a pod.

Následnou spätnou FT môžeme určiť impulzné charakteristiky. Pri tejto spätnej FT je výhodné použiť vety z komplexnej analýzy, uvedené v Dodatku E.

4.5.1 RC obvod



$$H(i\omega) = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

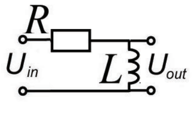
Spätnou FT dostávame

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \frac{i}{\tau}} d\omega$$

Prechodom ku komplexnej frekvencii $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ dostávame $e^{i\omega t} = e^{i\omega_1 t} e^{-\omega_2 t} \to 0$ pre $\omega_2 \to \infty$ ($|e^{i\omega_1 t}| = 1$), a teda integrál cez celú reálnu os ω môžeme "beztrestne" doplniť o *nulový* príspevok po *kladne* orientovanej (*proti* smeru hodinových ručičiek) polkružnici od $\omega_1 = \infty$ do $\omega_1 = -\infty$ cez $\omega_2 = \infty$. Tým *jednoducho* obopneme celú hornú komplexnú polrovinu ω, a na výpočet takéhoto integrálu použijeme vetu o reziduách. V hornej polrovine sa nachádza jeden pól podintegrálnej funkcie $\omega = i/\tau$. Reziduum podintegrálnej funkcie v tomto bode je $\left(e^{i\omega t}\right)_{\omega \to i/\tau} = e^{-t/\tau}$, a

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i\tau} \oint \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \frac{i}{\tau}} d\omega = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

4.5.2 RL obvod



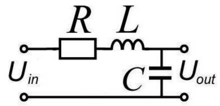
$$H(i\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{1}{1 + \frac{R}{i\omega L}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega\tau}}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + \frac{1}{i\omega\tau}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - \frac{i}{\tau}} e^{i\omega t} d\omega$$

Keďže $\omega e^{i\omega_2 t} \to 0$ pre $\omega \to \infty$, môžeme použiť rovnaký postup, a

$$h(t) = ... = \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

4.5.3 RLC obvod



$$H(i\omega) = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + i\frac{R}{L}\omega} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^2 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} d\omega = \frac{-\omega_0^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_\gamma - i\gamma)(\omega + \omega_\gamma - i\gamma)} d\omega$$

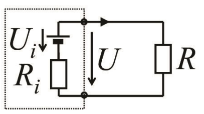
Ak $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ je reálne, prenosová funkcia má dva jednoduché póly $\pm\omega_\gamma + i\gamma$ v hornej komplexnej polrovine.
Ak ω_γ je imaginárne, $\omega_\gamma = -i\beta$ ($\gamma > \beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$), póly $\mp i\beta + i\gamma$ opäť ležia v hornej polrovine.
Podľa vety o reziduách

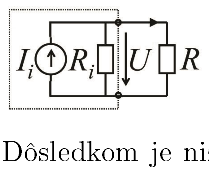
$$h(t) = ... = -i\omega_0^2 \left\{ \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_\gamma - i\gamma} \right)_{\omega \to -\omega_\gamma + i\gamma} + \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_\gamma - i\gamma} \right)_{\omega \to \omega_\gamma + i\gamma} \right\} =$$

$$... = \frac{\omega_0^2}{2\beta} e^{-\gamma t} \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t} \right) \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\omega_0^2}{\omega_\gamma} e^{-\gamma t} \sin \omega_\gamma t$$

4.6 LINEÁRNE AKTÍVNE DVOJPÓLY

Pojmom **aktívny dvojpól** označujeme zdroje napätia (NZ) alebo prúdu (PZ), ktoré odoberáme (pripájame do *záťaže*) dvojicou výstupných svoriek. Za *ideálne* považujeme zdroje, ktorých výstupná veličina (napätie/prúd) nezávisia na veľkosti záťaže.





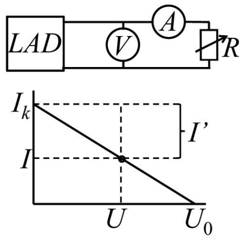
Vnútorná konštrukcia *reálnych* zdrojov spôsobuje, že pri ich zaťažení sa časť výkonu zdroja spotrebuje v samotnom zdroji. Zástupným pojmom pre tento disipatívny prvok zdroja je jeho **vnútorný odpor**. Ľubovoľný reálny NZ/PZ môžeme modelovať náhradnou schémou ideálneho NZ/PZ s vnútorným odporom R_i zapojeným *v sérii/paralelne*.

Dôsledkom je nižšia hodnota napätia na výstupných svorkách - **svorkového napätia** U - oproti *vnútornému* (elektromotorickému) napätiu NZ U_i, resp. nižšia hodnota prúdu do záťaže I oproti *vnútornému* prúdu PZ I_i.

V prípade NZ platí $\qquad U_i = (R_i + R)I = R_i I + U \qquad \underline{U = U_i - R_i I}$
(Pre ideálny NZ $R_i \to 0$ a $U = U_i$.)

V prípade PZ platí $\qquad I_i = \frac{U}{R_i} + I \qquad \underline{I = I_i - \frac{U}{R_i}}$
(Pre ideálny PZ $R_i \to \infty$ a $I = I_i$.)

Závislosť výstupného prúdu do záťaže od svorkového napätia (pri meniacej sa záťaži R) nazývame **zaťažovacou charakteristikou** zdroja. Ak je táto závislosť lineárna, považujeme zdroj (aktívny dvojpól) za *lineárny* (LAD).



Zaťažovacia charakteristika LAD:

I_k - *skratový* prúd ($R = 0$)

U_0 - napätie *naprázdno* ($R = \infty$)

Sú to *idealizované* parametre - nedajú sa zmerať, extrapolujú sa zo zaťažovacej charakteristiky.

$$\frac{I'}{I_k} = \frac{U}{U_0} \qquad\qquad I = I_k - I' = I_k\left(1 - \frac{U}{U_0}\right)$$

naprázdno $I = 0$ $\qquad U = U_0 = I_i R_i$ $\qquad$ nakrátko $I = I_k = I_i$

Ľubovoľný LAD teda môžeme *ekvivalentne* modelovať reálnym NZ alebo PZ s *tým istým* vnútorným odporom R_i zapojeným v sérii/paralelne (podľa uvedenej schémy) - **Theveninova**, resp. **Nortonova teoréma**. Zdroje s vlastnosťami blízkymi ideálnym nazývame *tvrdými* zdrojmi, opakom sú *mäkké* zdroje.
Pri nedostatočne tvrdých zdrojoch vzniká problém **výkonového prispôsobenia**: Výkon NZ odovzdaný do záťaže je

$$\mathcal{P} = UI = \frac{U^2}{R} = \left(U_i \frac{R}{R + R_i}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} = U_i^2 \frac{R}{(R + R_i)^2}$$

Požiadavka *maximálneho* odovzdaného výkonu ($\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R = 0}$) vedie na $\underline{R = R_i}$ a $\mathcal{P}_{max} = \frac{U_i^2}{4R_i}$. (Rovnaký výkon ako na záťaži R sa v tomto prípade spotrebuje v zdroji - "na R_i".) Táto hodnota je však len 25% teoretickej hodnoty pre ideálny NZ.
Rovnaká úvaha platí pre PZ.

Z hľadiska *striedavých* signálov má záťaž vo všeobecnosti rezistívny *aj* reaktívny charakter, a to isté platí aj o vnútornom odpore

$$R \to Z = R + iX \qquad\qquad R_i \to Z_i = R_i + iX_i$$

V takomto prípade hovoríme o **impedančnom prispôsobení**:

$$\mathcal{P} = \Re\{UI^*\} = \Re\left\{U_i \frac{Z}{Z + Z_i}\left(\frac{U_i}{Z + Z_i}\right)^*\right\} = ... = U_i^2 \frac{R_i}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2}$$

Maximalizácia tohto výrazu vedie na požiadavky

$$X + X_i \to 0 \qquad\qquad R \to R_i$$

čo znamená

$$\Re\{Z\} = \Re\{Z_i\} \quad , \quad \Im\{Z\} = -\Im\{Z_i\} \qquad \text{tj.} \qquad \underline{Z = Z_i^*}$$

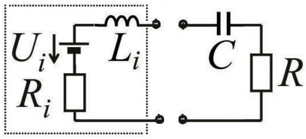
Prispôsobená záťaž je teda *komplexne združená* k výstupnej (tj. vnútornej) impedancii zdroja.

Pr.1:
Vnútorná impedancia zdroja má okrem rezistívnej aj (malú) induktívnu zložku. Hľadáme prispôsobenú záťaž.

$$Z_i = R_i + i\omega L_i \qquad Z = R + iX = Z_i^* \qquad \text{tj.} \qquad R = R_i \qquad iX = -i\omega L_i$$

Druhej požiadavke vyhovuje kapacitná zložka záťaže v sérii s jej rezistívnou zložkou

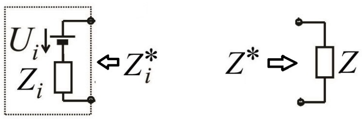
$$iX = \frac{1}{i\omega C} = \frac{\omega L_i}{i} \qquad \text{a teda} \qquad C = \frac{1}{\omega^2 L_i}$$



Je zrejmé, že podmienka prispôsobenia je splnená pre jedinú frekvenciu $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_i C}}$ - hodnotu C vyberáme teda pre frekvenciu zdroja (resp. majoritnú frekvenciu v jeho spektre z hľadiska výkonu).

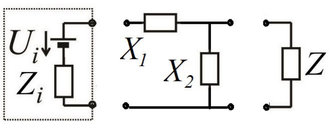
Je to rezonančná frekvencia vytvoreného RLC obvodu, pri ktorej je jeho impedancia čisto reálna. Reaktívnu zložku vnútornej impedancie zdroja možno teda eliminovať len tak, že ju dostaneme do *rezonancie* s reaktívnou zložkou záťaže - z pohľadu zdroja sa vtedy obe zložky "stratia".

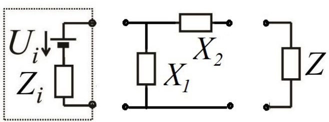
Pr.2:
Prispôsobenie danej komplexnej záťaže $Z = R + iX$ k zdroju s danou vnútornou impedanciou $Z_i = R_i + iX_i$. Riešením je vložiť medzi zdroj a záťaž prispôsobovací obvod (PO), ktorého *vstupná* impedancia *s pripojenou záťažou* je $Z_1 = Z_i^*$, a ktorého *výstupná* impedancia *s pripojeným zdrojom* je $Z_2 = Z^*$. *Vstupnou* impedanciou obvodu (štvorpólu) je pomer napätia a prúdu na jeho vstupných svorkách, teda záťaž, ktorú "cíti" zdroj signálu do tohto obvodu. *Výstupnou* impedanciou obvodu je pomer napätia a prúdu na jeho výstupných svorkách, teda vnútorná impedancia tohto obvodu ako zdroja signálu do (pripojenej) záťaže. Treba však mať na pamäti, že v systémoch, ktoré svojou vnútornou stavbou zaisťujú *obojsmerný* prenos výkonu medzi vstupom a výstupom, je vstupná impedancia daná nielen samotným systémom ale aj záťažou na jeho výstupe, a to isté platí aj o jeho výstupnej impedancii.)



Z pohľadu zdroja "všetko čo leží napravo" od jeho výstupných svoriek je záťaž. Z pohľadu záťaže "všetko čo leží naľavo" od jeho vstupných svoriek je zdroj (tj. náhradný zdroj v zmysle Theveninovej/Nortonovej teorémy).

Za podmienok obojstranného impedančného prispôsobenia celý výkon odobraný zdroju $\mathcal{P}_1$ nevratne vnikne do PO, a celý výkon vystupujúci z PO $\mathcal{P}_2$ nevratne vnikne (a pohltí sa) v záťaži. Aby však $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, musí byť PO bezstratový a teda konštruovaný *výlučne z reaktívnych* prvkov.





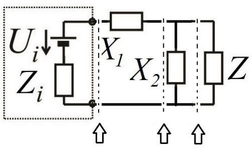
V systémoch so sústredenými parametrami je štandardným riešením PO v tvare L v alternatívnom prevedení podľa obrázkov. V prvom zapojení je podmienkou prispôsobenia zdroja a "záťaže" (všetko napravo od zdroja)

$$iX_1 + (iX_2 \parallel Z) = Z_i^*$$

a v druhom zapojení

$$iX_1 \parallel (iX_2 + Z) = Z_i^*$$

V oboch prípadoch dostávame riešením sústavy dvoch rovníc (pre reálnu a imaginárnu časť) príslušné správne hodnoty reaktancií X_1, X_2.



Uvedeným postupom sa prispôsobuje zdroj ku zvyšku obvodu, tj. k PO s pripojenou záťažou Z, čím je súčasne prispôsobená samotná záťaž k výstupu PO. Podmienka prispôsobenia je splnená v každom reze obvodu. (Presvedčte sa!)

5. NÁHODNÉ PROCESY

5.1 MATEMATICKÁ REPREZENTÁCIA NÁHODNÉHO SIGNÁLU

Matematickou reprezentáciou náhodného signálu je *náhodná závislá premenná* - veličina nadobúdajúca náhodné (vopred nepredpovedateľné) hodnoty (v texte uvažujeme zväčša veličinu závislú na *čase*). Náhodný signál je produktom **náhodného procesu** (NP). Výsledok každého NP je náhodný - hovoríme o konkrétnej **realizácii** NP $x(t)$ - pri každej nasledujúcej realizácii toho istého procesu bude (alebo môže byť) výsledok $x(t)$ *odlišný*.

Pri opakujúcom sa NP je výpovedná hodnota jeho jednotlivej realizácie (spravidla) zanedbateľná (je vecou "náhody"), má však zmysel vyhodnocovať NP *štatistickými* metódami. Možnou reprezentáciou NP je *štatistický súbor jeho realizácií* (napr. $x_i(t)$ je i-tá z N realizácií).

5.1.1 Pravdepodobnosť a hustota pravdepodobnosti

Pre *fixovanú* hodnotu nezávislej premennej (napr. času) má zmysel určovať **pravdepodobnosť** realizovania *konkrétnej* hodnoty NP. Ak NP $x(t)$ nadobúda pre $t = t_0$ len *diskrétne* hodnoty x_k, $k = 1, ...K$, a z celkového počtu N realizáci pripadá n_k realizácií na výsledok $X = x_k$, potom pravdepodobnosť výsledku $X = x_k$ je

$$\mathcal{P}(x_k(t_0)) = \frac{n_k}{N} \qquad 0 \leq \mathcal{P}(x_k) \leq 1 \qquad \sum_{k=1}^{K} \mathcal{P}(x_k) = 1$$

Pre *spojitú* množinu hodnôt NP má zmysel zaviesť **hustotu pravdepodobnosti** $p(x) \geq 0$ výsledku *v danom infinitezimálnom intervale*

$$p(x, t_0)dx = \mathcal{P}(x \leq X \leq x + dx) \qquad \mathcal{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

Hustotu pravdepodobnosti môžeme zaviesť aj pre *diskrétne* x

$$p(x, t_0) = \sum_{k=1}^{K} \mathcal{P}(x_k)\delta(x - x_k)$$

Treba si uvedomiť, že *skutočná* pravdepodobnosť výsledku $X = x_k$ je daná vzťahom

$$\mathcal{P}(x_k(t_0)) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_k}{N}$$

a výraz $\mathcal{P}(x_k) = \frac{n_k}{N}$ pre *reálny* (tj. konečný) počet realizácií je len **súborovým odhadom** pravdepodobnosti.

Na opis rozdelenia pravdepodobnosti, resp. hustoty pravdepodobnosti na množine hodnôt NP definujeme **distribučnú funkciu** $F(x)$ - pravdepodobnosť, že výsledok $X \leq x$

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) \qquad F(-\infty) = 0 \ , \ F(\infty) = 1 \qquad p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

5.1.2 Stredné hodnoty a momenty náhodných signálov

V danom časovom okamihu t_0 možno určiť **strednú hodnotu** NP $x(t)|_{t=t_0}$ určenú zo súboru N realizácií

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{K} x_k \mathcal{P}(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K} x_k n_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{resp.} \qquad \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

Podobne **stredná kvadratická hodnota**, ktorá je mierou *výkonu* signálu, je pre diskrétny, resp. spojitý signál daná výrazom

$$\overline{x^2} = \sum_{k=1}^{K} x_k^2 \mathcal{P}(x_k) = ... = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \qquad \text{resp.} \qquad \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

Pri konečnom počte realizácií N sú $\mathcal{P}(x_k)$ aj $p(x)$ len súborovými odhadmi, a to isté platí aj pre $\overline{x}$ a $\overline{x^2}$.

NP je **stacionárny (v užšom zmysle slova)**, ak sa tieto a aj ďalšie jeho štatistické charakteristiky *nemenia v čase* (sú rovnaké pre všetky t_0).

Treba si uvedomiť rozdiel medzi takouto strednou hodnotou a strednou hodnotou *jednej realizácie* NP *cez čas*

$$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} x(t_l) \qquad \text{resp.} \qquad \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) dt$$

čo je zase len odhadom skutočnej strednej hodnoty

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} x(t_l) \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) dt$$

Rovnako možno určiť strednú kvadratickú hodnotu *jednej realizácie cez čas*

$$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} x^2(t_l) \qquad \text{resp.} \qquad \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x^2(t) dt$$

NP je **ergodický**, ak stredná aj stredná kvadratická hodnota cez súbor realizácií sa *rovnajú* strednej, resp. strednej kvadratickej hodnote jednej realizácie cez čas.
Dá sa ukázať, že *ergodický signál je vždy stacionárny*, opačné tvrdenie však neplatí.
V ďalšom texte sa zaoberáme výlučne ergodickými signálmi

Pre *časovú* strednú hodnotu *diskrétneho* (ergodického) signálu $x(t)$ so zadanými hodnotami x_l len v diskrétnych časových okamihoch t_l teda platí

$$\mu = \left(\lim_{L\to\infty}\right) \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} x(t_l) = \sum_{k=1}^{K} x_k \mathcal{P}(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

a stredná hodnota *spojitého* signálu $x(t)$ je daná výrazom

$$\mu = \left(\lim_{T\to\infty}\right) \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Pri NP konkrétny tvar $x(t)$ nevieme vyjadriť, a nevieme teda rátať jeho časové integrály - je preto výhodou ergodických NP, že časové integrály vieme nahradiť integrálmi, resp. sumami cez súbor realizácií.

Ďalším z praktického hľadiska zaujímavým štatistickým parametrom, určujúcim výkon *striedavej zložky* signálu, je **variancia** daná vzťahom

$$\sigma^2 = \overline{(x-\mu)^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\mu]^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt - 2\mu \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mu^2 dt =$$

$$= \overline{x^2} - 2\mu^2 + \mu^2 = \underline{\overline{x^2} - \mu^2}$$

Platí tiež

$$\sigma^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\mu]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x-\mu]^2 p(x)dx$$

Pre *stacionárny* proces ani σ^2 *nie je* funkciou času.

Kvôli formálnemu zjednodušeniu sa často definuje tzv. operátor **očakávania**, reprezentujúci strednú hodnotu (cez súbor realizácií) príslušnej *funkcie* signálu $x(t)$

$$\mathsf{E}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx \qquad \text{resp.} \qquad \mathsf{E}\{f(x)\} = \sum_k^K f(x_k)\mathcal{P}(x_k)$$

Pre $f(x) = x$ je $\mathsf{E}\{x\} = \mu$, podobne $\mathsf{E}\{x^2\} = \overline{x^2}$ a $\mathsf{E}\{[x-\mu]^2\} = \sigma^2$

Pozn.:
Hodnota očakávania vôbec nemusí byť najpravdepodobnejšou alebo typickou hodnotou náhodnej premennej (dokonca nemusí byť ani *realizovateľnou* hodnotou), ide o *štatisticky ustrednenú* charakteristiku NP cez dostatočne dlhý čas a/alebo dostatočne veľký počet realizácií NP.

Očakávania typu

$$\mathsf{E}\{x^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx$$

sa nazývajú **k-tými momentami** náhodnej premennej x.

Očakávania typu

$$\mathsf{E}\{[x-\mu]^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x-\mu]^k p(x)dx$$

sa nazývajú **k-tými centrovanými (centrálnymi) momentami** náhodnej premennej x.

5.1.3 Viacrozmerné pravdepodobnosti a momenty

Pre pravdepodobnosť *súčasnej* realizácie hodnôt X, Y dvoch *štatisticky nezávislých* náhodných premenných x, y platí

$$\mathcal{P}(X,Y) = \mathcal{P}(X)\mathcal{P}(Y)$$

Pre dvojrozmernú hustotu pravdepodobnosti (súčasnú realizáciu x z dx-intervalu okolo X a y z dy-intervalu okolo Y) platí

$$p(x,y)dxdy = \mathcal{P}(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy)$$

Pre distribučnú funkciu dvoch náhodných premenných platí

$$F(x,y) = \mathcal{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(\eta,\zeta)d\eta d\zeta$$

Dvojrozmerný operátor očakávania je daný vzťahom

$$\mathsf{E}\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p(x,y)dxdy$$

pre spojitú funkciu, resp.

$$\mathsf{E}\{f(x,y)\} = \sum_j \sum_k f(x_j,y_k)\mathcal{P}(x_j,y_k)$$

pre diskrétnu funkciu.

Stredná hodnota (1. moment) *jednej* premennej x, resp. y pre *dvojrozmernú* hustotu pravdepodobnosti $p(x,y)$ je

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xp(x,y)dxdy \qquad \mu_y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yp(x,y)dxdy$$

Variancia (2. centrovaný moment) *jednej* premennej x, resp. y pre *dvojrozmernú* hustotu pravdepodobnosti $p(x,y)$ je

$$\overline{\sigma_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 p(x,y)dxdy \qquad \overline{\sigma_y^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_y)^2 p(x,y)dxdy$$

Zmiešaný 2. moment - **korelácia** je

$$k_{xy} = \mathsf{E}\{xy\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dxdy$$

Dve náhodné premenné sú nekorelované ak sú NP štatisticky nezávislé ($p(x,y) = p(x)p(y)$), vtedy

$$\mathsf{E}\{xy\} = \mathsf{E}\{x\}\mathsf{E}\{y\} \qquad k_{xy} = \mu_x\mu_y$$

Zmiešaný 2. centrovaný moment - **kovariancia** je

$$\sigma_{xy}^2 = \mathsf{E}\{(x-\mu_x)(y-\mu_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y)p(x,y)dxdy =$$

$$= ... = k_{xy} - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y = k_{xy} - \mu_x\mu_y$$

Pre štatisticky nezávislé procesy $x(t)$, $y(t)$ platí

$$\sigma_{xy}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)p(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_y)p(y)dy = 0$$

Štatisticky nezávislé NP sú *nekorelované* (naopak to nemusí platiť).

5.1.4 Výkon a energia signálu

Pre periodické (deterministické) signály pod pojmom *výkon* signálu rozumieme *strednú hodnotu okamžitého* výkonu cez periódu signálu. Pre neperiodické signály, a teda aj NP, hodnota stredného výkonu závisí od časového intervalu stredovania.
Pre signály konečnej dĺžky trvania (a ohraničenej amplitúdy) má zmysel hovoriť o *energii* signálu (časový integrál okamžitého výkonu *konverguje*)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X(\omega)]^2 d\omega$$

kde $X(\omega)$ je FT signálu $x(t)$, a $[X(\omega)]^2$ je spektrálnou hustotou energie signálu (rovnica je integrálnou formou Parsevalovej teorémy).

Ak signály spĺňajú podmienku konvergencie uvedeného integrálu (konečná energia), nazývajú sa **energetickými signálmi**, v opačnom prípade hovoríme o **výkonových signáloch**, pre ktoré definujeme stredný výkon

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t) dt$$

Do tejto skupiny patria aj náhodné signály.

Pre jednotlivé realizácie NP sa však hodnoty tohto integrálu líšia, určenie hodnoty reprezentatívnej pre celý NP preto vyžaduje určité ďalšie stredovanie.

5.1.5 Korelačné a kovariačné funkcie

Z teórie deterministických signálov vieme, že energetické spektrá (spektrálne hustoty energie) sú FT korelačných funkcií. Problém divergencie energetického integrálu náhodných signálov vedie k používaniu koncepcie *výkonového* signálu, a korelačné funkcie sú v tomto prípade definované nasledovne:

• **Autokorelačná funkcia** $K_{xx}(t_1, t_2) = \mathsf{E}\{x(t_1)x(t_2)\}$ - korelácia hodnôt *jedného* NP v dvoch *rôznych* okamihoch t_1, t_2 (tu využívame ergodickosť - operátor očakávania vyjadrujeme ako *časovú* strednú hodnotu).
Ak sú splnené podmienky

$$\mu_x \neq \mu_x(t) \qquad \sigma_x^2 \neq \sigma_x^2(t) \qquad K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(\tau) \quad \text{kde} \quad \tau = t_1 - t_2$$

proces $x(t)$ označujeme za **stacionárny v širšom zmysle slova** (nižšie uvažujeme len takéto procesy).

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\tau)x(t) dt \qquad \text{pre spojitý NP}$$

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x(t_n-\tau)x(t_n) \qquad \text{pre diskrétny NP}$$

- Pre $\tau = 0$ odpovedá $K_{xx}(0)$ strednej kvadratickej hodnote

- $K_{xx}(-\tau) = K_{xx}(\tau)$ - párna funkcia

- Ak NP obsahuje periodickú zložku s frekvenciou ω, jeho K_{xx} tiež obsahuje periodickú zložku s tou istou frekvenciou

- Ak K_{xx} nie je periodická, má maximum pri $\tau \to 0$, pričom $K_{xx}(\tau) \to 0$ pre $\tau \to \infty$ (čo je vlastnosť deterministických signálov) len ak má NP nulovú strednú hodnotu (napr. šumy)

• **Vzájomná korelačná funkcia** $K_{xy}(t_1, t_2) = \mathsf{E}\{x(t_1)y(t_2)\}$ - korelácia hodnôt dvoch *rôznych* NP v dvoch rôznych okamihoch.

Ak $x(t)$ a $y(t)$ sú stacionárne a $K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(\tau)$, hovoríme o **stacionárne zviazaných** NP

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\tau)y(t)dt \qquad \text{pre spojité NP}$$

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x(t_n-\tau)y(t_n) \qquad \text{pre diskrétne NP}$$

Ak procesy $x(t)$, $y(t)$ sú *štatisticky nezávislé* (**ortogonálne**, $p(x,y) = p(x)p(y)$), potom $K_{xy} = 0$.

- Vo všeobecnosti K_{xy} nemusí byť párna, a nemusí mať maximum pri $\tau \to 0$

- $K_{xy}(-\tau) = K_{yx}(\tau)$

- Ak $x(t)$ a $y(t)$ majú periodickú zložku rovnakej frekvencie, potom sa objaví aj v $K_{xy}(\tau)$

Pre súčet dvoch NP platí $\qquad z(t) = x(t) + y(t)$

$$K_{zz}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} z(t)z(t-\tau)dt = ... = K_{xx}(\tau) + K_{yy}(\tau) + K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)$$

tj. autokorelačná funkcia súčtu NP závisí od *vzájomných* korelačných funkcií.
Ak x, y nie sú korelované $\qquad K_{zz}(\tau) = K_{xx}(\tau) + K_{yy}(\tau)$

Ak napr. $x(t)$ je periodický signál na frekvencii ω "utopený" v šume $y(t)$, v tom prípade $x(t)$ a $y(t)$ sú určite nekorelované, pričom pre dostatočne dlhý čas ($\tau \to \infty$) je $K_{yy}(\tau) \to 0$ (toto pre šumy platí lebo ich $\mu = 0$), a $K_{zz}(\tau) = K_{xx}(\tau)$ - obsahuje periodickú zložku s ω (detekcia veľmi slabých signálov).

• **Autokovariačná funkcia** $R_{xx}(t_1, t_2) = \mathsf{E}\{[x(t_1) - \mu_x][x(t_2) - \mu_x]\}$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t-\tau) - \mu_x][x(t) - \mu_x]dt \qquad \text{pre spojitý NP}$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} [x(t_n-\tau) - \mu_x][x(t_n) - \mu_x] \qquad \text{pre diskrétny NP}$$

• **Vzájomná kovariačná funkcia** $R_{xy}(t_1, t_2) = \mathsf{E}\{[x(t_1) - \mu_x][y(t_2) - \mu_y]\}$

Pre *nekorelované* procesy $R_{xy}(t_1, t_2) = 0$.

Pre *stacionárne zviazané* NP $R_{xy}(t_1, t_2)$ a $R_{yx}(t_1, t_2)$ závisia len od $\tau = t_1 - t_2$, a platí $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$.

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t-\tau) - \mu_x][y(t) - \mu_y]dt \qquad \text{pre spojité NP}$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} [x(t_n - \tau) - \mu_x][y(t_n) - \mu_y] \qquad \text{pre diskrétne NP}$$

Pozn.:
V literatúre sa môžeme stretnúť s rôznymi definíciami pojmov korelácia a kovariancia, a samotné pojmy sa často zamieňajú. Častou je napr. definícia autokorelačnej funkcie (stacionárneho NP) v tvare

$$\frac{\mathsf{E}\{x(t) - \mu\}\mathsf{E}\{x(t-\tau) - \mu\}}{\sigma_{xx}^2}$$

a nadobúda hodnoty z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ - takáto definícia je výhodná, lebo poskytuje *bezrozmernú* a *normovanú* mieru štatistickej závislosti NP.

Metóda korelačných funkcií sa v experimentálnej fyzike využíva napr. na hľadanie slabých a zašumených periodických signálov (napr. kozmické zdroje), meranie koherentnosti elektromagnetických vĺn, meranie trvania veľmi krátkych impulzov (lasery), na porovnávanie čiarových spektier (spektroskopia), a pod.

5.1.6 Spektrálna analýza náhodných signálov

Prechod z časovej do frekvenčnej oblasti sa realizuje pomocou fourierovských transformácií (FT)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

kde $X(\omega)$ je spektrálna hustota (amplitúdy) signálu. Treba pripomenúť, že daná spektrálna hustota sa viaže na konkrétnu realizáciu NP.

Predpokladajme stacionárny NP $x(t)$, pre ktorého strednú hodnotu *cez súbor realizácií* $\mu_x = 0$, a teda

$$\mu_x = \overline{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)}e^{i\omega t}d\omega = 0$$

čo je splnené pre všetky t len ak

$$\underline{\overline{X(\omega)} = 0}$$

Štatistické očakávanie (stredná hodnota cez súbor realizácií) spektrálnej hustoty NP je teda 0 pre všetky frekvencie.

Reálnemu NP odpovedá *reálne* $x(t)$, a teda

$$x(t) = x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

Autokorelačná funkcia takéhoto procesu (závisí len od τ) je potom

$$K(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \overline{x^*(t)x(t+\tau)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{X^*(\omega)X(\omega')}e^{-i\omega t}e^{i\omega'(t+\tau)}d\omega d\omega' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{X^*(\omega)X(\omega')}e^{i(\omega'-\omega)t}d\omega'}\, e^{i\omega\tau}d\omega$$

Keďže autokorelačná funkcia takéhoto procesu nesmie závisieť od t (len od τ), musí platiť

$$\overline{X^*(\omega)X(\omega')} \sim \delta(\omega' - \omega) \qquad \text{(inak člen } e^{i(\omega'-\omega)t} \text{ nevypadne)}$$

Výraz má význam autokorelačnej funkcie spektrálnej hustoty, a teda hodnoty spektrálnej hustoty pre dve *rôzne* frekvencie *nie sú korelované* (tzv. δ-korelácia).

Keďže $X^*(\omega)X(\omega')$ má rozmer spektrálnej hustoty *energie* (a $\delta(\omega' - \omega)$ má rozmer $1/\omega$), môžeme položiť $\overline{X^*(\omega)X(\omega')} = 2\pi S_{xx}(\omega)\delta(\omega' - \omega)$, kde $S_{xx}(\omega)$ je **spektrálna hustota výkonu** (pre výkonové náhodné procesy nahrádzame energetické spektrum výkonovým spektrom).

Vzťah medzi výkonovým spektrom $S_{xx}(\omega)$ náhodného signálu $x(t)$ a jeho autokorelačnou funkciou je teda daný vzťahmi

$$\underline{S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau} \qquad \text{(FT)} \qquad \underline{K_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega}$$

čo je tzv. **Wienerova-Chinčinova teoréma**

Pre $\tau = 0$ je

$$K_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\nu)d\nu$$

kde $\nu = \omega/2\pi$ je frekvencia v Hz, a teda $K_{xx}(0)$ predstavuje *celkový* výkon (v celom spektre).

Keďže súčasne platí

$$K_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt \qquad \text{a} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

Porovnaním dostávame pre spektrálnu hustotu výkonu NP

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|X(\omega)|^2}{2T}$$

$K_{xx}(\tau)$ aj $S_{xx}(\omega)$ sú *párne* (a reálne), takže

$$K_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_{xx}(\omega)\cos\omega\tau d\omega \qquad S_{xx}(\omega) = 2\int_0^{\infty} K_{xx}(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

Obdobným spôsobom môžeme Wienerovu-Chinčinovu teorému formulovať pre **vzájomné energetické spektrum** a *vzájomnú* korelačnú funkciu

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad K_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

Pre $\tau = 0$ je priemerný výkon súčinu signálov

$$K_{xy}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)d\omega$$

kde

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{X^*(\omega)Y(\omega)}{2T}$$

K_{xy} *nie je* párna $\Rightarrow$ jej FT S_{xy} je *komplexná* - nesie v sebe informáciu o vzájomnom fázovom posune $x(t)$ a $y(t)$, platí pritom $\quad S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega) = S^*_{yx}(\omega)$

Pre súčet dvoch NP $\quad z(t) = x(t) + y(t)$ platí

$$K_{zz}(\tau) = K_{xx}(\tau) + K_{yy}(\tau) + K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)$$

a teda

$$S_{zz}(\omega) = S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega) + S_{xy}(\omega) + S_{yx}(\omega)$$

a ak x, y nie sú korelované $\qquad S_{zz}(\omega) = S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega)$

Pr.:
$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$
φ fluktuuje medzi 0 a 2π s hustotou pravdepodnosti $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$
$\mu(t) =?$, $K_{xx}(t_1, t_2) =?$, $R_{xx}(t_1, t_2) =?$, $S_{xx}(i\omega) =?$

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \underline{0}$$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\cos(\omega_0 t_2 + \varphi) d\varphi = ...$$

$$... = \frac{A^2}{4\pi}\left\{\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi] d\varphi}_{0} + \int_0^{2\pi} \cos[\omega_0(t_1 - t_2)] d\varphi\right\} =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(t_1 - t_2)] = \underline{\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau = K_{xx}(\tau)}$$

K_{xx} je periodická s ω_0 rovnako ako $x(t)$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_1, t_2) = \underline{K_{xx}(\tau)} \qquad \text{lebo} \qquad \mu_x = 0$$

$$\underline{S_{xx}(i\omega) = \frac{\pi A^2}{2}[\delta_x(\omega - \omega_0) + \delta_x(\omega + \omega_0)]}$$

Pr.:
$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi)$
φ fluktuuje medzi 0 a 2π s hustotou pravdepodnosti $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$
$A(t)$ - modulácia, $K_{AA}(\tau)$ a $S_{AA}(i\omega)$ zadané, $\varphi(t)$ a $A(t)$ sú štatisticky nezávislé
$\mu(t) =?$, $K_{xx}(\tau) =?$, $R_{xx}(\tau) =?$, $S_{xx}(i\omega) =?$

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\}E\{\cos[\omega_0 t + \varphi]\} = \mu_A(t)\cdot 0 = \underline{0}$$

$$K_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) = E\{x(t+\tau)x(t)\}E\{\cos[\omega_0(t+\tau)+\varphi]\cos[\omega_0 t+\varphi]\} = ... = \underline{\frac{K_{AA}(\tau)}{2}\cos\omega_0\tau}$$

$$S_{AA}(i\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau)\cos\omega_0\tau e^{-i\omega\tau} d\tau = \underline{\frac{1}{4}[S_{AA}(\omega - \omega_0) + S_{AA}(\omega + \omega_0)]}$$

(FT rádioimpulzu)

Pr.:
$x(t) = \sum_n A_n\delta(t - nT - \theta)$" - vlak" impulzov s periódou T
$A_n = 1$ alebo -1 náhodne s rovnakými pravdepodobnosťami $\mathcal{P}(1) = \mathcal{P}(-1) = \frac{1}{2}$
θ - náhodný posuv v čase $0 < \theta < T$, $p(\theta) = \frac{1}{T}$
$\mu(t) =?$, $K_{xx}(\tau) =?$, $R_{xx}(\tau) =?$, $S_{xx}(i\omega) =?$

$$\mu_x(t) = ... = \overline{A_n}\int_0^T \delta(t - nT - \theta) d\theta = 0 \quad \text{lebo} \quad \overline{A_n} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0$$

$$K_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) = \sum_m \sum_n \overline{A_m A_n}\ \overline{\delta(t - mT - \theta)\delta(t - nT - \theta + \tau)}$$

$$\overline{A_m A_n} = \begin{cases} \overline{A_n^2} = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1 & , \ n = m \\ \overline{A_m}\ \overline{A_n} = 2\left\{\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)\right\} = 0 & , \ n \neq m \qquad \text{štatisticky nezávislé} \end{cases}$$

$$K_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_n \int_{t-(n+1)T}^{t-nT} \delta(x + \tau)\delta(x)dx \qquad x = t - nT - \theta \quad , \quad dx = -d\theta$$

pričom $n \in (-\infty, \infty)$, teda

$$K_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(x + \tau)\delta(x)dx = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\delta(\tau - y)dy = \underline{\frac{1}{T}\delta(\tau)}$$

$$\underline{S_{xx}(i\omega) = \frac{1}{T}}$$

5.1.7 Diferencovanie náhodných signálov

Niektoré systémy na spracovanie signálov pôsobia ako derivátory alebo integrátory vstupných signálov, treba sa preto zaoberať aj vlastnosťami derivácií a integrálov NP.

Nech pre NP $x(t)$, $y(t)$ platí $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.
Podmienkou diferencovateľnosti NP je jeho spojitosť $\quad \lim_{\Delta t \to 0} \overline{[x(t + \Delta t) - x(t)]^2} = 0$.
Nech NP je stacionárny, $\mu_x \neq \mu_x(t) \Rightarrow \underline{\mu_y = \frac{d\mu_x}{dt} = 0}$
Keďže $y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$, platí

$$K_y(\tau) = \overline{y(t)y(t + \tau)} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \cdot \frac{x(t + \tau + \Delta t) - x(t + \tau)}{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^2}\Big[\overline{x(t + \Delta t)x(t + \tau + \Delta t)} - \overline{x(t + \Delta t)x(t + \tau)} -$$

$$- \overline{x(t)x(t + \tau + \Delta t)} + \overline{x(t)x(t + \tau)}\Big]$$

Všetky štyri členy sú autokorelačné funkcie vstupného NP, a teda

$$K_y(\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^2}\left[2K_{xx}(\tau) - K_{xx}(\tau - \Delta t) - K_{xx}(\tau + \Delta t)\right]$$

čo nie je nič iné, než (záporná) 2. derivácia (derivácia 1. derivácie) funkcie $K_{xx}(\tau)$ podľa τ, teda

$$\underline{K_{yy}(\tau) = -\frac{d^2 K_{xx}(\tau)}{d\tau^2}}$$

Podľa Wienerovej-Chinčinovej teorémy je

$$K_{yy}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\omega^2 S_{xx}(\omega)}\, e^{i\omega\tau}d\omega$$

a teda

$$\underline{S_{yy}(\omega) = \omega^2 S_{xx}(\omega)}$$

Je teda zrejmé, že v spektre *derivácie* NP sú výraznejšie zastúpené jeho *vysokofrekvenčné* zložky.

Vzájomná korelačná funkcia NP a jeho derivácie je

$$K_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t + \tau)} = \overline{x(t)\frac{d}{d\tau}x(t + \tau)} = \frac{d}{d\tau}\overline{x(t)x(t + \tau)} = \underline{\frac{dK_{xx}(\tau)}{d\tau}}$$

Keďže $K_{xx}(\tau)$ je *párna* funkcia, platí $\frac{dK_{xx}(\tau)}{d\tau}|_{\tau\to 0} = 0$ (maximum), NP a jeho derivácia v *tom istom* časovom okamihu *nie sú korelované.*

Nech pre NP $x(t)$, $z(t)$ platí $z(t) = \int_0^t x(t')dt'$. Ak $x(t)$ je stacionárny NP, potom

$$\mu_z = \overline{z(t)} = \int_0^t \overline{x(t')}dt' = \underline{\mu_x t}$$

teda $\mu_z = 0$ len ak $\mu_x = 0$.
Ak $\mu_x \neq 0$, potom $z(t)$ je *nestacionárny* NP.

$$K_{zz}(t_1, t_2) = \overline{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} x(t')x(t'')dt'dt''} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \underbrace{\overline{x(t')x(t'')}}\, dt'dt'' =$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \underbrace{K_{xx}(t', t'')}\, dt'dt'' \quad \left(= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{xx}(t'' - t')dt'dt'' \right)$$

Tento výsledok (kde posledná časť rovnice platí len pre stacionárny NP $x(t)$) je aj pre stacionárny vstupný NP závislý od výberu konkrétnych hodnôt t_1,t_2, a nielen od ich rozdielu, čo znamená, že výstupný NP $z(t)$ je *vždy nestacionárny* (bez ohľadu na nulovosť μ_x).

V praxi to znamená neohraničený nárast úrovne fluktuácií na výstupe integrátora s časom (ako "akčný rádius" opitého námorníka).

5.2 ODOZVA LINEÁRNEHO SYSTÉMU NA NÁHODNÝ SIGNÁL

5.2.1 Reprezentácia systému pomocou korelačných funkcií

Analýza odozvy systému na NP v *časovej* oblasti je realizovateľná pomocou korelačných funkcií.

Predpokladajme systém s impulznou odozvou $h(t)$, vstupným NP $x(t)$ a odpovedajúcim výstupným signálom $y(t)$. Platí $\quad y(t) = h(t) * x(t)$

Pre strednú hodnotu výstupného signálu platí

$$\mu_y(t) = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\underbrace{E\left\{x(t-\tau)\right\}}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\underbrace{\mu_x(t-\tau)}d\tau$$

(Táto rovnosť platí pre *stabilný* systém s *deterministickou* $h(t)$ - vtedy ju možno vyňať spod E.)

Ak $x(t)$ je *stacionárny* NP, $\mu_x \neq \mu_x(t)$, a

$$\mu_y = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = \mu_x H(0) \qquad \Rightarrow \qquad \mu_y \neq \mu_y(t)$$

kde $H(0)$ je hodnota *prenosovej charakteristiky* systému pre $\omega = 0$.
Podmienka $\mu_y \neq \mu_y(t)$ je nutnou, nie však postačujúcou podmienkou stacionárnosti $y(t)$ (pri stacionárnom $x(t)$).

Autokorelačná funkcia výstupného signálu je

$$K_{yy}(t_1, t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)x(t_1-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)x(t_2-\tau_2)d\tau_2\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) K_{xx}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)$$

čo pri stacionárnom $x(t)$ prejde na

$$K_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) K_{xx}(\tau - \tau_1 + \tau_2) = K_{yy}(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$

čo znamená, že aj $y(t)$ je *stacionárny* NP (v širšom zmysle).

Vzájomná korelačná funkcia vstupného a výstupného signálu je

$$K_{yx}(t_1, t_2) = E\{y(t_1)x(t_2)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t_2)h(\theta)x(t_1 - \theta)d\theta\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \underbrace{E\{x(t_1 - \theta)x(t_2)\}} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \underbrace{K_{xx}(\tau - \theta)} d\theta$$

kde $\tau = t_1 - t_2$ pre stacionárne NP, a teda

$$\underline{K_{yx}(\tau) = K_{xy}(\tau) = h(\tau) * K_{xx}(\tau)}$$

Obdobné vzťahy platia aj pre *diskrétny* systém s impulznou odozvou $h(n)$, vstupným NP $x(n)$ a odpovedajúcim výstupným signálom $y(n)$ - hodnota výstupného signálu v každom okamihu n je konvolúciou vstupného signálu a impulznej odozvy systému (výstup závisí od vstupu v danom aj predchádzajúcich okamihoch)

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + ... + h(r)x(n-r) \qquad / \cdot x(n-k)$$

$$y(n)x(n-k) = h(0)x(n)x(n-k) + h(1)x(n-1)x(n-k) + ... + h(r)x(n-r)x(n-k)$$

Keďže $\mathsf{E}\{y(n)x(n-k)\} = K_{xy}(k)$ a $\mathsf{E}\{x(n-r)x(n-k)\} = K_{xx}(k-r)$, uvedená rovnica prejde na tvar

$$K_{xy}(k) = h(0)K_{xx}(k) + h(1)K_{xx}(k-1) + ... + h(r)K_{xx}(k-r)$$

Porovnaním s prvou rovnicou dostávame

$$\underline{K_{xy}(k) = h(k) * K_{xx}(k)}$$

$K_{xy}(k)$ je teda konvolúciou systémovej impulznej odozvy a autokorelačnej funkcie vstupného signálu.

Na určenie systémovej impulznej odozvy $h(\tau)$ je vhodným vstupným signálom tzv. *biely šum* s konštantnou spektrálnou hustotou B, ktorého korelačná funkcia má tvar $K_{xx}(\tau) = B\delta(\tau)$, a teda $h(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{B}$.

5.2.2 Reprezentácia systému vo frekvenčnej oblasti

Z vlastností FT vyplýva

$$K_{xy}(\tau) = h(\tau) * K_{xx}(\tau) \qquad \longrightarrow \qquad S_{xy}(i\omega) = H(i\omega)S_{xx}(i\omega)$$

Prenosová charakteristika systému je teda

$$\underline{H(i\omega) = \frac{S_{xy}(i\omega)}{S_{xx}(i\omega)}}$$

Pre spektrálnu hustotu výstupného signálu platí

$$K_{yy}(0) = E\{y^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau_1)}\, h(\tau_2)K_{xx}(\tau_2-\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau_2-\tau_1)\,\overbrace{e^{i\omega\tau_1}}\, d\tau_1$$

Ak položíme $\tau = \tau_2 - \tau_1$, potom

$$K_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)d\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)e^{i\omega\tau_2}d\tau_2}_{H^*(i\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}_{S_{xx}(i\omega)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(i\omega)|H(i\omega)|^2 d\omega$$

Súčasne platí $\quad K_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(i\omega)d\omega \quad$ a teda

$$\underline{S_{yy}(i\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{xx}(i\omega)}$$

Vzťah medzi výkonovou spektrálnou hustotou na vstupe a výstupe systému môžeme získať aj intuitívne z analógie s deterministickými signálmi, kde $|Y(i\omega)|^2 = |H(i\omega)|^2|X(i\omega)|^2$: Keďže $|X(i\omega)|^2$, $|Y(i\omega)|^2$ odpovedajú výkonu, resp. energii (deterministických) signálov, môžeme pre stochastické spektrálne hustoty výkonu stanoviť obdobnú rovnicu.

5.2.3 Fluktuačno-dissipačná teoréma

V štatistickej fyzike pod pojmom **fluktuácia** rozumieme náhodné odchylky systému z/okolo rovnovážneho stavu (reprezentovaného termodynamickými (TD) stavovými veličinami). Prirodzenou a neodstrániteľnou príčinou týchto fluktuácií je *pohyb na mikroskopickej úrovni* systému. V makroskopických systémoch pri nenulovej teplote ide predovšetkým o tzv. *tepelný pohyb*, charakterizovaný TD teplotou. (Na *klasickej mikroskopickej* úrovni ide stále o pohyb determinovaný zákonmi newtonovskej mechaniky.)

Predpokladajme mikroskopickú časticu s *nulovou* počiatočnou kinetickou energiou, vloženú do makroskopického systému častíc *pri danej teplote*. Následné nárazy častíc systému udelia postupne tejto častici strednú kinetickú energiu odpovedajúcu strednej kinetickej energii častíc systému $\langle E_K \rangle$. Podľa ekvipartičnej teorémy všetkým stupňom voľnosti prislúcha *rovnaká stredná energia* $\frac{1}{2}k_B T$. Okamžitá rýchlosť častice prirodzene bude kolísať - fluktuovať - okolo svojej strednej hodnoty. Tieto tzv. **rovnovážne fluktuácie** sú bezprostredným dôsledkom kontaktu danej častice s *tepelným kúpeľom* (tj. makroskopickým systémom pri danej teplote).

Predpokladajme teraz *makroskopický* pohyb v takomto systéme (pohyb makroskopického telesa prostredím, elektrický prúd, a pod.). Z TD hľadiska ide o *nerovnovážny* stav - niektoré stupne voľnosti (spojené napr. s pohybom ťažiska pohybujúceho sa objektu) disponujú väčšou energiou než $\frac{1}{2}k_B T$. Interakciou so systémom však túto prebytočnú energiu systému odovzdávajú. Príkladom je mechanické trenie či elektrický odpor - interakcia makroskopického pohybu s obrovským množstvom mikroskopických stupňov voľnosti, reprezentujúcich tepelný kúpeľ. Systém sa ohrieva na úkor makroskopického pohybu - energia *makroskopického* pohybu **dissipuje**, tj. nevratne "degraduje" na energiu *tepelného* pohybu.

Z uvedeného vyplýva, že dissipácia energie aj fluktuácie v systéme majú rovnaký pôvod - kontakt s tepelným kúpeľom. V ďalšom kvantifikujeme vzťahy medzi touto trojicou pojmov.

Analyzujme problém (z historických dôvodov aj kvôli názornosti) na príklade rýchlosti v *brownovského* pohybu častíc o hmotnosti m vo viskóznom prostredí s koeficientom trenia η, opísaného tzv. *Langevinovou rovnicou* (LR)

$$m\frac{dv(t)}{dt} + \eta v(t) = f(t)$$

Pravá strana rovnice reprezentuje náhodné zrážky skúmanej reprezentatívnej častice s časticami tepelného kúpeľa - má teda *náhodný* charakter. Takáto dif. rovnica sa preto nazýva *stochastickou.*

Pozn.:
V elektronickom kontexte tejto úlohe formálne odpovedá rovnica pre prúd v stratovom induktívnom prostredí (RL obvod), resp. pre náboj v RC obvode, so stochastickými napäťovými pulzami

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \qquad \text{resp.} \qquad R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

Avšak pozor! V prvom prípade má súčin príčiny a následku $u(t)i(t)$ rozmer *výkonu*, rovnako ako $f(t)v(t)$, v druhom prípade $u(t)q(t)$ rozmer energie. Fyzikálna interpretácia zložiek zovšeobecnenej susceptibility (kap. 3.2.2) pri frekvenčnej analýze bude teda pre tieto prípady odlišná, ako uvidíme nižšie.

Bez budiacej sily by riešenie LR bolo časovo tlmené, $v(t) = v(0)e^{-t/\tau_r}$, z počiatočnej hodnoty $v(0)$, s časovou konštantou $\tau_r = m/\eta$. Makroskopický pohyb by sa utlmil. Tu si treba uvedomiť, že celý proces nemá *hladký* priebeh v čase (je postupnosťou zrážok), a teda člen $\frac{dv(t)}{dt}$ v LR treba fyzikálne vnímať skôr ako *konečnú* zmenu rýchlosti Δv za *konečný* časový interval Δt, pričom takéto riešenie LR má zmysel v limite $\Delta t \ll \tau_r$.

Vplyvom fluktuácií reprezentovaných budiacou silou $f(t)$ však pretrváva *brownovský* pohyb. Náhodný charakter tejto sily zaručuje (v rovnorodom tepelnom kúpeli) jej priestorovú nezávislosť. Predpokladajme $\langle f(t)\rangle = 0$ (náhodný smer) a tiež nezávislosť $f(t)$ od rýchlosti častíc. Taktiež predpokladáme, že na časovej škále Δt je budiaca sila *nekorelovaná* - jednotlivé zrážky sú štatisticky nezávislé. V skutočnosti korelácia medzi jednotlivými zrážkami zaniká na časovej škále τ_c odpovedajúcej strednej dobe medzi zrážkami. Ak predpokladáme, že pre časovú škálu LR platí $\Delta t \gg \tau_c$, potom autokorelačnú funkciu náhodnej budiacej sily môžeme vyjadriť v tvare

$$K_{ff}(\tau) = \langle f(t)f(t-\tau)\rangle = B\delta(\tau)$$

kde $B = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau)d\tau$ je mierou (priemernej) veľkosti tejto sily (a určite závisí od teploty kúpeľa). Znakom $\langle\rangle$ označujeme (v celej kapitole) priemerovanie *cez súbor realizácií.* Hľadáme teda riešenie LR s (nenulovou pravou stranou) v limite $\tau_c \ll \Delta t \ll \tau_r$.

Dá sa ukázať, že riešením LR v tejto limite je (stačí ho dosadiť do LR)

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau_r} + \frac{1}{m}\int_0^t e^{-(t-t')/\tau_r} f(t')dt'$$

Keďže LR je *stochastická* dif. rovnica, každej *náhodnej* hodnote $f(t)$ vyhovuje nejake *partikulárne* riešenie. Takéto riešenia však nie sú zaujímavé (zaujímavé je len riešenie "nezávisiace od náhody"), treba teda uskutočniť príslušné spriemerovanie. Pre strednú hodnotu rýchlosti (cez súbor realizácií) platí $\langle v(t)\rangle = v(0)e^{-t/\tau_r}$ (lebo $\langle f(t)\rangle = 0$) - čo značí, že ide o *nestacionárny* proces spejúci k TD rovnováhe za čas $\sim \tau_r$. V rovnovážnom stave existuje už len brownovský pohyb charakterizovaný $\langle v^2(t)\rangle$ (pri $\langle v(t)\rangle = 0$).

Po ustálení (tj. zániku tlmených členov, $t \gg \tau_r$) dostávame

$$\langle v^2(t)\rangle \to \frac{1}{m^2}\left\langle \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_r} f(t')dt' \int_0^t e^{-(t-t'')/\tau_r} f(t'')dt'' \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{m^2}\int_0^t \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_r} e^{-(t-t'')/\tau_r} B\delta(t''-t')dt'dt'' = ...$$

$$= \frac{B}{2\eta m}\left(1-e^{-2t}/\tau_r\right) \to \frac{B}{2\eta m}$$

Podľa ekvipartičnej teorémy pre tento stupeň voľnosti platí $\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT$, a teda

$$\underline{B = 2\eta k_B T} \qquad \text{resp.} \qquad \underline{\eta = \frac{1}{2k_BT}\int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau)d\tau}$$

Tento výsledok je jednou z foriem **fluktuačno-dissipačnej teorémy** (FDT), a vyjadruje hľadaný kvantitatívny súvis medzi mierou dissipácie (η), mierou fluktuácií (B) a teplotou kúpeľa (T).

Preskúmajme ešte autokorelačnú funkciu rýchlosti $K_{vv}(\tau)$, kde (predpokladajúc ergodickosť) nahrádzame priemerovanie jednej realizácie v čase priemerovaním cez súbor realizácií

$$K_{vv}(\tau) = \langle v(t)v(t+\tau)\rangle = v(0)^2 e^{-(2t+\tau)/\tau_r} + \frac{e^{-(2t+\tau)/\tau_r}}{m^2}\int_0^t \int_0^{t+\tau} e^{(t'+t'')/\tau_r}\langle f(t')f(t'')\rangle dt'dt''$$

čo v priblížení $K_{ff}(\tau) = \langle f(t')f(t'')\rangle = B\delta(t'-t'')$ a v limite dlhých časov $t \gg \tau_r$ vedie na

$$K_{vv}(\tau) \to \frac{B}{2\eta m}e^{-|\tau|/\tau_r} = \frac{k_BT}{m}e^{-|\tau|/\tau_r}$$

(párna funkcia). Autokorelácia fluktuujúcej rýchlosti teda zaniká (tj. rýchlosť "stráca pamäť") s časovou konštantou τ_r, rovnako ako makroskopický pohyb $\langle v(t)\rangle$ - obe sú riešením *rovnakej* dif. rovnice. Makroskopická relaxácia systému *do* rovnovážneho stavu sa teda riadi rovnakými zákonitosťami ako mikroskopické fluktuácie *okolo* rovnovážneho stavu (čo je nosná myšlienka za FDT).

V našom elektronickom príklade RL obvodu jednoduchou zámenou $m \leftrightarrow L$, $\eta \leftrightarrow R$, $v(t) \leftrightarrow i(t)$, $f(t) \leftrightarrow u(t)$ má FDT podobu

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{uu}(\tau)d\tau = B = 2k_BTR$$

pre dissipatívnu zložku systému R, pričom akumulačná zložka systému L vstupuje do ekvipartičnej teorémy

$$\frac{1}{2}L\langle i^2(t)\rangle = \frac{1}{2}k_BT$$

V našom druhom elektronickom príklade RC obvodu je formálna zhoda pohybovej rovnice systému s LR zavádzajúca: Formálna transformácia $m \leftrightarrow R$, $\eta \leftrightarrow \frac{1}{C}$ je totiž "nefyzikálna" - akumulačný a dissipačný element si vymieňajú miesta v pohybovej rovnici! Vo formálnej analógii s LR síce platí $\langle q^2(t)\rangle = \frac{BC}{2R}$, avšak ekvipartičná teoréma sa (pochopiteľne) vzťahuje na akumulačný prvok C, $\frac{\langle q^2(t)\rangle}{2C} = \frac{1}{2}k_BT$, čo vedie opäť ku vzťahu

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{uu}(\tau)d\tau = B = 2k_BTR$$

Existencia fluktuácií je teda v oboch prípadoch viazaná na dissipatívny prvok R.

Transformáciou pôvodnej LR do frekvenčnej oblasti dostávame vzťah medzi fourierovskými obrazmi budiacej sily a rýchlosti

$$V(\omega) = \frac{1}{\eta}\frac{1}{1+i\omega\tau_r}F(\omega)$$

Pre príslušné (výkonové) spektrálne hustoty pritom platí

$$S_{vv}(\omega) = \lim_{\Theta\to\infty} \frac{1}{2\Theta} \langle |V(\omega)|^2 \rangle \qquad\qquad S_{ff}(\omega) = \lim_{\Theta\to\infty} \frac{1}{2\Theta} \langle |F(\omega)|^2 \rangle$$

kde Θ má význam doby merania. Odtiaľ dostávame

$$S_{vv}(\omega) = \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{1 + (\omega\tau_r)^2} S_{ff}(\omega)$$

Výkonové spektrálne hustoty sú súčasne FT autokorelačných funkcií príslušných *stacionárnych* procesov, a teda $S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B\delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = B = 2\eta k_B T$ (v priblížení $\tau_c \to 0$). Odtiaľ

$$K_{vv}(\tau) = \frac{B}{2\pi\eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega\tau_r)^2} e^{i\omega\tau} d\omega$$

čo (pomocou vety o reziduách) dá *stacionárnu* hodnotu $K_{vv}(\tau) = \frac{B}{2\eta^2\tau_r} e^{-|\tau|/\tau_r} = \frac{k_B T}{m} e^{-|\tau|/\tau_r}$.

Keďže $K_{vv}(\tau)$ je reálna a *párna*, je zrejmé, že aj $S_{vv}(\omega)$ je *reálna*. Fourierovský obraz $K_{vv}(\tau)$ je potom

$$S_{vv}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{vv}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_{vv}(\tau) \cos\omega\tau d\tau = ...$$

$$= \frac{B}{\eta^2\tau_r} \Re \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\tau/\tau_r} e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} = \frac{B}{\eta^2} \Re \left\{ \frac{1}{1 + i\omega\tau_r} \right\} = \frac{2k_B T}{\eta} \frac{1}{1 + (\omega\tau_r)^2}$$

LR môžeme vnímať ako pohybovú rovnicu systému so vstupným signálom $f(t)$ a výstupným signálom $v(t)$, pričom pomer

$$\frac{V(\omega)}{F(\omega)} = H(i\omega) = \chi(i\omega) = \frac{1}{\eta} \frac{1 - i\omega\tau_r}{1 + (\omega\tau_r)^2}$$

je prenosová charakteristika (zovšeobecnená susceptibilita) zovšeobecneného systému. Potom platí

$$S_{vv}(\omega) = 2k_B T \Re \{\chi(i\omega)\}$$

Pre RL obvod má tento výsledok tvar ($B = 2k_B TR$, $\eta \to R$)

$$S_{ii}(\omega) = \frac{2k_B TR}{R^2} \frac{1}{1 + i\omega\tau_r} = 2k_B T \Re\{\chi(i\omega)\} = \underline{2k_B T \chi'(\omega)}$$

Pre RC obvod ($B = 2k_B TR$, $\eta \to \frac{1}{C}$) platí

$$S_{qq}(\omega) = 2k_B TRC^2 \frac{1}{1 + i\omega\tau_r} = 2k_B T\tau_r \chi'(\omega) = \underline{-\frac{2k_B T}{\omega} \chi''(\omega)}$$

(so znamienkom + v konvencii F). Hoci platnosť vzťahu $\chi''(\omega) = -\omega\tau_r\chi'(\omega)$ sa viaže na náš jednoduchý systém 1. rádu (vo všeobecnosti platia KK vzťahy), uvedené vzťahy medzi (výkonovou) spektrálnou hustotou fluktuácií a zložkami zovšeobecnenej susceptibility systému majú všeobecnejšiu platnosť, a predstavujú jednu z foriem FDT - univerzálny (v klasickej limite) vzťah medzi fluktuáciami, teplotou a *dissipatívnou* zložkou susceptibility systému (χ' v prvom a χ'' v druhom prípade).

Uvedené výpočty sú platné za predpokladu, že autokorelačnú funkciu fluktuácií môžeme aproximovať δ-funkciou, a teda spektrálna hustota takýchto fluktuácií (podľa Wienerovej-Chinčinovej teorémy) je konštanta. Takéto fluktuácie nazývame **bielym šumom**. V skutočnosti korelačné časy fluktuácií τ_c nemusia byť zanedbateľné na relevantnej časovej škále. Potom autokorelačná funkcia je gaussovská (s nenulovou šírkou $\approx \tau_c$), a ak $\tau_c \approx \tau_r$, naruší sa lokálnosť LR (v čase), a člen $\eta v(t)$ musí byť nahradený konvolúciou $\int_{-\infty}^{t} \eta(t-\tau) v(\tau) d\tau$. Retardovaný charakter LR je potom vo frekvenčnej oblasti reprezentovaný funkčnou závislosťou $\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) e^{-i\omega t} dt$. V elektronike to znamená $R = R(\omega)$. Spektrálna hustota fluktuácií je konštantná pre $\omega \ll 1/\tau_c$.

5.3 ŠUMY

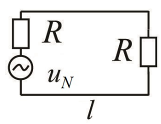
Pod pojmom **šum** rozumieme náhodné *fluktuácie* "užitočného" signálu, spôsobené stochastickými fyzikálnymi procesmi v elektronických systémoch. Do pojmu šum nezarátavame poruchy "užitočného" signálu spôsobené *rušením* inými *externými* signálmi, ani *skreslenie* signálu systémom.

V závislosti od fyzikálneho mechanizmu vzniku a spektrálnej hustoty rozlišujeme niekoľko druhov šumu.

5.3.1 Tepelný šum

Tepelný (Johnsonov, resp. Nyquistov) šum vzniká v dôsledku tepelného pohybu nosičov náboja - pri ľubovoľnej nenulovej teplote vykonávajú voľné nosiče náboja chaotický brownovský pohyb, pri ktorom dochádza k náhodnej lokálnej variácii nábojovej hustoty, a teda elektrického potenciálu. Rozptylové procesy v elektricky vodivom prostredí, ktoré určujú jeho elektrický odpor, majú za následok, že kompenzácia náhodnej nábojovej nerovnováhy nenastáva v nemerateľne krátkom čase, a teda že na vývodoch systému je merateľné fluktuujúce **šumové napätie**, ktoré závisí od elektrického odporu systému.

Reálny odporník (rezistor) môžeme nahradiť ekvivalentnou schémou ideálneho ("nešumiaceho") odporu v sérii so zdrojom šumového napätia. Výrazy pre šumové napätie a spektrálnu hustotu tepelného šumu možno odvodiť nasledovným spôsobom:
Predpokladajme prenos šumového napätia z rezistoru R na identický rezistor pripojený pomocou bezstratového nevyžarujúceho a impedančne prispôsobeného prenosového vedenia dĺžky l (všetok výkon zdroja šumu sa prenesie na druhý rezistor). (Pripomíname, že úloha je symetrická vzhľadom na zámenu rezistorov.)



Napäťové vlny v tvare $u(x,t) = u_0 e^{i(kx-\omega t)}$ sa šíria prenosovým vedením rýchlosťou $v = \frac{\omega}{k}$ pri splnení okrajových podmienok $u(0,t) = u(l,t)$, čo je splnené pre módy s vlnočtom $k_n = \frac{2\pi n}{l}$, kde n je celé číslo. Hustota módov je $D(\omega) = \frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{dk}\frac{dk}{d\omega} = \frac{l}{2\pi v}$.

Stredná energia elektromagnetického módu je daná energiou fotónu vynásobenou stredným počtom fotónov v danom stave (móde), teda

$$\langle \epsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right\} - 1}$$

Celkový výkon absorbovaný "prijímacím" rezistorom je teda daný integrovaním energie módov, pohltenej za čas "doletu módov do rezistora" $\frac{l}{v}$, cez celé spektrum

$$P_{absorb} = \frac{v}{l} \int_0^\infty D(\omega) \frac{\hbar\omega d\omega}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right\} - 1}$$

kde integrácia prebieha cez módy šíriace sa kladným smerom k, čomu odpovedajú kladné frekvencie.

Po dosadení

$$P_{absorb} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega d\omega}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right\} - 1}$$

V termodynamickej rovnováhe musí byť stredný (v čase) výkon absorbovaný rezistorom rovný výkonu *emitovanému*, teda $R\langle i^2\rangle$, kde $i = \frac{u_N}{2R}$ je prúd generovaný v obvode šumovým napätím, teda

$$P_{emit} = \frac{\langle u_N^2\rangle}{4R}$$

kde

$$\langle u_N^2\rangle = \lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} u(t)u^*(t)dt = \lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{2\Theta}\int_{-\Theta}^{\Theta} u(t)u^*(t)dt$$

Emitovaný šumový výkon sa dá vyjadriť prostredníctvom svojej spektrálnej hustoty, ktorá je (podľa Wienerovej-Chinčinovej teorémy) FT autokorelačenj funkcie šumového napätia

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overbrace{\left(\lim_{\Theta\to\infty}\frac{1}{2\Theta}\int_{-\Theta}^{\Theta} u(t)u^*(t-\tau)dt\right)}e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}d\omega =$$

$$= \lim_{\Theta\to\infty}\frac{2\pi}{2\Theta}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\Theta}^{\Theta} u(t)u^*(t-\tau)\delta(\tau)dt = \lim_{\Theta\to\infty}\frac{2\pi}{2\Theta}\int_{-\Theta}^{\Theta} u(t)u^*(t)dt = 2\pi\langle u_N^2\rangle$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot e^{-i\omega\tau}d\omega = 2\pi\delta(\tau)\right)$$

Porovnaním výkonu dissipovaného (emitovaného) na rezistore a výkonu tepelne vyžiareného dostávame

$$\frac{\langle u_N^2\rangle}{4R} = \frac{1}{4R}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega = \frac{1}{4R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S_+(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\hbar\omega d\omega}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right\}-1}$$

a odtiaľ

$$\underline{S_+(\omega) = 4R\frac{\hbar\omega}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right\}-1}}$$

kde $S_+(\omega)$ je spektrálna hustota definovaná pre reálne, teda kladné frekvencie, pričom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega = \int_0^{\infty} S_+(\omega)d\omega \qquad\qquad S_+(\omega) = 2S(\omega)$$

($S_+(\omega)$ je definovaný v konvencii kde uvažujeme len kladné frekvencie, a teda celkový výkon v oboch konvenciách musí byť rovnaký.) Vo všeobecnosti z rovnosti dvoch *určitých* integrálov ešte nevyplýva rovnosť ich podintegrálnych výrazov, v danom prípade by však nerovnosť podintegrálnych výrazov protirečila zákonom termodynamiky: Ak by v ľubovoľnom intervale frekvencií existovala nerovnováha medzi vyžiareným výkonom jedného rezistora a *ním* absorbovaným výkonom od druhého rezistora na *tej istej teplote*, stačilo by medzi rezistory umiestniť *pasívny nedissipatívny* element *selektívne* prepúšťajúci energiu v *tomto* frekvenčnom intervale (LC-filter odrážajúci energiu mimo rezonancie), a dosiahli by sme perpetuum mobile 2. druhu. (Pomocou *pasívneho* prvku by sa prvý rezistor stále viac ohrieval odoberaním tepla z druhého, stále chladnejšieho rezistora.)

V "klasickej" limite $\hbar\omega \ll k_BT$ (nie príliš nízka teplota, nie príliš vysoká frekvencia) dostávame

$$\underline{\underline{S_+(\omega) \cong 4Rk_BT}}$$

Pozn.:
V klasickej limite je stredná energia elektromagnetického módu $\langle\epsilon(\omega)\rangle \cong k_BT$, čo podľa ekvipartičnej teorémy odpovedá dvom "stupňom voľnosti" (dvom kvadratickým členom hamiltoniánu - hustote elektrickej energie $\sim E^2$ a magnetickej energie $\sim B^2$).

Pre izbovú teplotu ($300K$) je klasická limita dobrým priblížením až do frekvencií $10^{11}Hz$, pre vyššie frekvencie spektrálna hustota výkonu prudko klesá. Kvôli konštantnej spektrálnej hustote (v širokom frekvenčnom intervale) sa tepelný šum nazýva **bielym šumom**.

Z praktického hľadiska nás zaujíma šumový výkon v určitom intervale frekvencií, čo súvisí s konečnou šírkou pásma priepustnosti reálnych systémov (elektronických zariadení). Celkový výkon tepelného šumu v danom frekvenčnom intervale $\Delta\nu$ ($\nu = \omega/2\pi > 0$), vyjadrený prostredníctvom strednej kvadratickej hodnoty *napätia*, je daný integráciou (napäťovej) spektrálnej hustoty výkonu cez daný frekvenčný interval

$$\underline{\underline{\langle u_N^2 \rangle \cong 4Rk_BT\Delta\nu}}$$

čo je tzv. **Nyquistov vzťah**.

Šumové napätie tepelného šumu závisí len od veľkosti odporu (a teploty), nie od typu rezistora.

Treba zdôrazniť, že *signál* $x(t)$ je v tomto prípade reprezentovaný *napätím*, a teda "výkon" signálu (v zmysle všeobecných definícií pojmov v predchádzajúcich častiach textu) je $x^2(t) = u^2(t)$, a jeho spektrálna hustota $S(\omega)$, resp. $S(\nu)$ je tzv. *napäťovou* spektrálnou hustotou výkonu, $S_u(\nu)$. Často je však signál reprezentovaný *prúdom* - v takom prípade pod pojmom "výkon" signálu rozumieme $x^2(t) = i^2(t)$, a jeho spektrálna hustota je tzv. *prúdovou* spektrálnou hustotou výkonu, $S_i(\nu)$. Veličiny $S_u(\nu)$ a $S_i(\nu)$ majú teda *rôzny fyzikálny rozmer*, V^2/Hz alebo A^2/Hz, a "stredný výkon" získaný ich prostou integráciou cez frekvencie je v skutočnosti len *strednou kvadratickou hodnotou* príslušnej veličiny $x(t)$ (v jednotkách V^2 alebo A^2, nie však W!).

V prípade tepelného šumu platí

$$S_i(\nu) = \frac{1}{R^2} S_u(\nu) = \frac{4k_BT}{R}$$

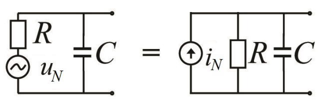
Pre "skutočný" výkon (v jednotkách W) platí

$$P = 4k_BT\Delta\nu$$

a je teda *nezávislý* na hodnote odporu R - táto univerzalita je daná charakterom tepelného žiarenia (výkon žiarenia absolútne čierneho telesa závisí len od jeho teploty).

Maximálny šumový výkon môže rezistor dodať do *prispôsobenej* záťaže, tj. do odporu (resp. reálnej časti impedancie) *rovnakej* hodnoty - *maximálny dostupný* šumový výkon rezistora R je teda

$$P_{pz} = Ri^2 = R\frac{\langle u_{\check{S}}^2 \rangle}{(R+R)^2} = k_BT\Delta\nu$$



V praxi však meranie šumového napätia znamená pripojenie reálneho odporu na meracie zariadenie pomocou prívodov, ktoré predstavujú parazitnú kapacitu.
Pomocou Nortonovej teorémy (náhrada *napäťového* zdroja v *sérii* s odporom *prúdovým* zdrojom *paralelne* s odporom) môžeme schému merania šumového napätia prekresliť podľa obrázka - celková impedancia obvodu voči zdroju je teraz daná paralelnou kombináciou odporu a kapacity, teda $Z = \frac{1}{1/R + i\omega C}$, a medzi výkonovými spektrami *výstupného* napätia a šumového prúdu platí

$$S_{u_v}(\nu) = S_i(\nu)Z^2 = \frac{S_i(\nu)R^2}{1 + (2\pi\nu RC)^2} = \frac{S_u(\nu)}{1 + (2\pi\nu RC)^2}$$

Integráciou cez celé spektrum dostávame

$$\langle u_v^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{4k_BTR}{1 + (2\pi\nu RC)^2} d\nu = \frac{k_BT}{C} \qquad \left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^\infty = \frac{\pi}{2} \right)$$

Tento výraz korešponduje s ekvipartičnou teorémou (kapacita ako energiu akumulujúci prvok predstavuje ďalší stupeň voľnosti s energiou $\frac{1}{2}C\langle U^2 \rangle = \frac{1}{2}k_BT$).

Treba zdôrazniť, že samotná kapacita nie je zdrojom šumu. Ak by sme v schéme s 2 rezistormi jeden z nich nahradili kondenzátorom, v TD rovnováhe by šumový výkon generovaný rezistorom a dissipovaný kondenzátorom musel byť rovný šumovému výkonu generovanému kondenzátorom a absorbovaným rezistorom. Kondenzátor však nedissipuje energiu, nemôže teda ani generovať.

Pr.:
Šumové napätie na kondenzátore RLC obvodu.
V RLC obvode je zdrojom tepelného šumového napätia u_N rezistor R. Dif. rovnica popisujúca časovú závislosť náboja na kondenzátore je

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u_N$$

Ide opäť o *stochastickú* dif. rovnicu. Zo štatistickej povahy problému je zrejmé, že výpovednú hodnotu má výraz $\langle q^2\rangle$ (a nie $\langle q\rangle$) - riešime teda najprv dif. rovnicu pre q^2 (vynásobíme našu rovnicu q)

$$L\frac{d^2q}{dt^2}q + R\frac{dq}{dt}q + \frac{q^2}{C} = qu_N$$

S uvážením rovností

$$\frac{d}{dt}q^2 = 2q\frac{dq}{dt} \quad\Rightarrow\quad q\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}q^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q^2 = 2q\frac{d^2q}{dt^2} + 2\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad q\frac{d^2q}{dt^2} = -\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}q^2$$

dostávame

$$-L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{L}{2}\frac{d^2}{dt^2}q^2 + \frac{R}{2}\frac{d}{dt}q^2 + \frac{q^2}{C} = qu_N$$

Pri ustrednení zohľadňujeme, že $\langle u_N\rangle = 0$, a že v termodynamickej rovnováhe podľa ekvipartičnej teorémy

$$\langle\frac{1}{2}Li^2\rangle = \langle\frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT$$

a teda

$$L\frac{d^2}{dt^2}\langle q^2\rangle + R\frac{d}{dt}\langle q^2\rangle + \frac{2}{C}\langle q^2\rangle = 2k_BT$$

Toto je už dif. rovnica s *konštantnou* (zovšeobecnenou) silou - konštantná vonkajšia "sila" spôsobí len posunutie rovnovážnej polohy harmonického oscilátora (tj. hodnoty $\langle q^2\rangle$). Po zavedení substitúcií $u' = \frac{\langle q^2\rangle}{C^2} - \frac{k_BT}{C}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\tau = RC$ dostávame

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2}{dt^2}u' + \tau\frac{d}{dt}u' + 2u' = 0$$

Známym riešením takejto rovnice sú tlmené kmity. Pri dostatočne veľkom tlmení sa pohyb stáva aperiodickým (zatlmenie nastane za kratší čas než perióda kmitov). Pre napätie na kondenzátore po ustálení (tj. utlmení kmitov) platí

$$\langle u^2\rangle = \frac{\langle q^2\rangle}{C^2} = \frac{k_BT}{C}$$

čo odpovedá ekvipartičnej teoréme $\langle\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\rangle = \frac{1}{2}k_BT$.

Analyzujme tento výsledok: Prečo dochádza (v strednej hodnote) k počiatočnému nárastu napätia na kondenzátore a následnému ustáleniu na jednej hodnote? Zovšeobecnenou silou vyvolávajúcou náhodný prúd v obvode je šumové napätie rezistora, rezistor je súčasne zodpovedný za tlmiacu silu (odpor). Týmto prúdom sa nabíja kondenzátor, počas nabíjania však prúd slabne vďaka narastajúcej reakcii nabíjajúceho sa kondenzátora (snáď ilustratívnejší je mechanický analóg rastúcej spätnej sily pri napínaní pružiny). V počiatočnej fáze nabíjania môžeme spätnú silu kondenzátora (pružiny) zanedbať - rovnica má potom tvar

$$L\frac{d^2}{dt^2}\langle q^2\rangle + R\frac{d}{dt}\langle q^2\rangle = 2k_BT$$

a riešením pri počiatočných podmienkach $q(t=0)=0$, $\frac{dq(t=0)}{dt}=0$ je

$$\langle q^2(t)\rangle = \frac{2k_BT}{R}\left[t+\frac{L}{R}\left(e^{-Rt/L}-1\right)\right]$$

(Pre overenie stačí dosadiť.)
Pre dlhé časy v porovnaní s časovou konštantou L/R dostávame (po utlmení exponenciálneho člena)

$$\langle q^2(t)\rangle \cong \frac{2k_BT}{R}t$$

čo je výsledok pripomínajúci (a nie náhodou) *náhodnú chôdzu* (stredná kvadratická vzdialenosť prejdená opitým námorníkom *lineárne* rastie s časom, tj. s počtom krokov). V limite veľmi krátkych časov (vzhľadom na L/R) po iniciovaní prúdu platí (Taylorov rozvoj)

$$\langle q^2(t)\rangle \cong \frac{k_BT}{L}t^2$$

čo odpovedá *konštantnému* prúdu (lineárny nárast náboja na kondenzátore s časom - v analógii s opitým námorníkom je to doba v rámci *jedného* kroku).

Monotónny nárast (strednej kvadratickej hodnoty) napätia na kondenzátore v dôsledku tepelného šumu rezistora je teda proces analogický náhodnej chôdzi. Náš proces však speje k saturácii v dôsledku reakcie nabíjajúceho sa kondenzátora (dodatočný člen $\frac{2}{C}\langle q^2\rangle$ v dif. rovnici - nabíjací prúd postupne zaniká), čo skôr odpovedá analógii s opitým námorníkom priviazaným k pevnému bodu (krčme) pomocou dlhej (mäkkej) pružiny.

Nyquistov vzťah možno získať aj z fyzikálneho modelu, ktorý sme analyzovali v 5.2.3: Náhodný pohyb *každého* elektrónu vo vodiči dĺžky l, prierezu A, s koncentráciou vodivostných elektrónov n a elektrickým odporom R, dáva príspevok k šumovému napätiu $u_i = \frac{Re}{l}v_i$, kde v_i je náhodná rýchlosť elektrónu. Autokorelačná funkcia rýchlosti náhodného pohybu (podľa 5.2.3) je

$$K_{vv}(\tau) = \frac{k_BT}{m}e^{\frac{-|\tau|}{\tau_r}}$$

a teda (jednostranná) napäťová spektrálna hustota šumového výkonu je (podľa Wienerovej-Chinčinovej teorémy)

$$S_+(\omega) = 2\cdot 2\int_0^\infty K_{uu}(\tau)\cos\omega\tau d\tau = 4\left(\frac{Re}{l}\right)^2\int_0^\infty K_{vv}(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

(prvý faktor 2 zohľadňuje rovnosť $S_+(\omega)=2S(\omega)$ a druhý faktor 2 párnosť autokorelačnej funkcie), čo po dosadení (pozri 5.2.3) vedie na

$$S_+(\omega) = 4\left(\frac{Re}{l}\right)^2\frac{k_BT}{m}\frac{\tau_r}{1+(\omega\tau_r)^2} \cong 4\left(\frac{Re}{l}\right)^2\frac{k_BT}{m}\tau_r$$

(pre $\omega\tau_r \ll 1$, čo je obor platnosti Nyquistovho vzťahu). K celkovej napäťovej spektrálnej hustote výkonu $\langle u_N^2\rangle$ v danom intervale frekvencií $\Delta\nu$ prispieva nAL elektrónov vo vodiči, a teda $\langle u_N^2\rangle = nAlS(\nu)\Delta\nu$. Po dosadení, a s uvážením, že $R=\frac{l}{A}\frac{m}{ne^2\tau_r}$ (Drude), dostávame Nyquistov vzťah

$$\langle u_N^2\rangle = 4k_BT\Delta\nu$$

5.3.2 Výstrelový šum

Pôvod **výstrelového šumu** tkvie v diskrétnom charaktere náboja - na *mikroskopickej* úrovni má prenos náboja stochastický charakter. Na *makroskopickej* úrovni teda hodnota prúdu kolíše okolo svojej *strednej hodnoty*, a túto variáciu nazývame šumom. Predpokladajme detekčné zariadenie registrujúce tok náboja v podobe diskrétnych impulzov

$$i(t) = \sum_k q\delta(t - t_k)$$

kde t_k sú časy *náhodného* "dopadu" náboja q (z definície prúdu za daný čas zaregistruje detekčné zariadenie *v priemere* $\bar{i}/q$ "dopadov").

Autokorelačná funkcia prúdu

$$K_i(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} i(t)i(t+\tau)dt$$

určuje *jednostranné* šumové spektrum

$$S_i(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} K_i(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

vo význame strednej kvadratickej hodnoty (resp. variancie, keďže stredná hodnota je nulová) šumového prúdu na jednotkový frekvenčný interval, $S_i(\omega) = \overline{i^2}/\Delta\omega$. Uvažujeme len fyzikálne rozumné *kladné* frekvencie (*obojstranná* spektrálna hustota je *párna* funkcia, a teda jej *jednostranné* vyjadrenie pre $\omega > 0$ je jej *dvojnásobkom* - inými slovami: kladné a záporné frekvencie prispievajú rovnako), odtiaľ faktor 2.

Dosadením prúdu v tvare δ-impulzov dostávame

$$K_i(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{q^2}{T} \sum_k \sum_{k'} \int_{-T}^{T} \delta(t-t_k)\delta(t-t_{k'}+\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{q^2}{T} \sum_k \sum_{k'} \delta(t_k - t_{k'} + \tau)$$

Predpokladajme po dobu integrovania (od $-T$ po T) N prípadov, keď $t_k = t_{k'}$, príspevok do integrálu od týchto prípadov je $N\delta(\tau)$. Pre $t_k \neq t_{k'}$ sú jednotlivé príspevky v dvojitej sume rozložené v čase *náhodne*, a po patričnom ustrednení sa *vynulujú* (exaktný matematický dôkaz tohto tvrdenia je zložitý).

Prúdová autokorelačná funkcia má teda tvar

$$K_i(\tau) = \frac{q^2 N}{T}\delta(\tau) = q\bar{i}\delta(\tau)$$

kde $\bar{i} = \frac{qN}{T}$. Odpovedajúca spektrálna hustota je teda

$$\underline{S_i(\omega) = 2q\bar{i}}$$

čo je tzv. **Schottkyho vzťah**. Spektrálna hustota výstrelového šumu je teda *frekvenčne nezávislá* - výstrelový šum je *biely*.

Spektrálna hustota výstrelového šumu je teda *lineárnou* funkciou (strednej hodnoty) prúdu, pričom do koeficientu úmernosti vstupuje prenášaný náboj, ktorý môže byť rôzny od e. V prípade supravodivého prúdu tunelujúceho josephsonovským spojom $q = 2e$, zaujímavé výsledky dáva aj kvantový Hallov jav. Meranie spektrálnej hustoty šumu teda poskytuje priamu informáciu o charaktere nosičov náboja.

Treba zdôrazniť, že výstrelový šum *nezávisí od teploty*, a teda nedá sa eliminovať znižovaním teploty systému (ako v prípade tepelného šumu).

Často sa v literatúre uvádza, že výstrelový šum existuje len pri jednosmernom prúde, alebo že absentuje v metalických rezistoroch. Takéto tvrdenia treba chápať v tom zmysle, že nie sú vytvorené dobré podmienky pre jeho *pozorovanie* (napr. kvôli nepružnému rozptylu elektrónov na fonónoch v makroskopických kovových súčiastkach, čím dochádza k vyhladeniu fluktuácií tohto druhu). Výstrelový šum je dobre pozorovateľný v tunelových štruktúrach, Shottkyho diódach a pn-prechodoch, ale tiež v mezoskopických štruktúrach a nanoštruktúrach.

5.3.3 $1/f$ šum

Pod pojmom $1/f$ **šum** rozumieme všetky druhy šumov, ktoré (na rozdiel od bieleho šumu) majú výraznú frekvenčnú závislosť spektrálnej hustoty v tvare $1/\nu^\alpha$ (ν - frekvencia v Hz, tiež označovaná f), kde $\alpha \approx 1$. Takýto šum sa vyskytuje v rôznych systémoch (fyzikálnych, biologických, sociologických), a jeho príčiny a mechanizmy sú rozmanité (často nejasné). Matematický opis takýchto procesov spravidla vychádza z predstavy *poissonovského* NP charakterizovaného exponenciálnou relaxáciou udalostí v náhodných časoch t_k

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$$

FT takejto série náhodných udalostí je

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k x(t - t_k) e^{-i\omega t} dt$$

a pre výkonové spektrum platí

$$S(\omega) = \lim_{\Theta \to \infty} \frac{1}{2\Theta} \langle |X(\omega)|^2 \rangle = \frac{x_0^2 n}{\lambda^2 + \omega^2}$$

kde n je stredná frekvencia, s akou nastávajú udalosti (časy t_k), a Θ je doba merania.

Ak predpokladáme procesy s istým rozptylom hodnôt relaxačnej konštanty λ rovnomerne rozložených v intervale $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, pričom $\lambda_1 \to 0$ a $\lambda_2 \to \infty$, potom

$$S(\omega) = \lim_{\lambda_1 \to 0} \lim_{\lambda_2 \to \infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda(\omega) d\lambda = \lim_{\lambda_1 \to 0} \lim_{\lambda_2 \to \infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{x_0^2 n}{\lambda^2 + \omega^2} d\lambda = \frac{\pi x_0^2 n}{2\omega} = \underline{\frac{x_0^2 n}{4\nu}}$$

$1/f$ šum teda dominuje v spektrálnej hustote celkového šumu pri nízkych frekvenciách, pri vyšších frekvenciách je jeho príspevok "utopený" v bielom šume, hraničná frekvencia je pre rôzne druhy $1/f$ šumu rôzna.

Podľa systému, v ktorom sa $1/f$ šum objavuje, sa preň používajú rôzne označenia:

Prakticky vo všetkých elektronických systémoch sa stretávame s **blikavým šumom** (*flicker noise*). Jeho príčiny sú rôzne (generácia a rekombinácia elektrón-dierových párov v polovodičoch, nečistoty a defekty štruktúry, a pod.). Podobne ako výstrelový šum, aj blikavý šum je viazaný na *jednosmerný* prúd.

Praskavý šum (*burst noise, popcorn noise*) má charakter skokových prechodov medzi dvoma alebo viacerými napäťovými (resp. prúdovými) hladinami (pre svoj charakter sa tiež nazýva *telegrafným šumom*). Jeho príčinou sú efekty záchytu a náhleho uvoľnenia nosičov náboja, defekty štruktúr, a pod.

Fluktuujúca vodivosť nedokonalých kontaktov v elektronických systémoch je zdrojom **kontaktného šumu**.

5.3.4 Šumová šírka pásma

Reálne systémy prenášajúce signál (i šum) sú charakterizované svojou *prenosovou charakteristikou* $H(i\omega)$, určujúcou veľkosť preneseného signálu *na danej frekvencii* (tj. prenesený výkon v jednotkovom frekvenčnom intervale). Výsledná hladina šumu (šumového výkonu) na výstupe systému je daná integráciou spektrálnej hustoty cez všetky frekvencie, s ohľadom na $H(i\omega)$ systému.

Ekvivalentná šumová šírka pásma reálneho systému je definovaná pre *biely šum* ako šírka pásma priepustnosti takého *ideálneho filtra* (tj. filtra prepúšťajúceho s *konštantnou* amplitúdou v istom intervale frekvencií a s *nulovou* amplitúdou mimo tohto intervalu), tak aby plochy pod krivkami $|H(i\omega)|^2$ reálneho a ideálneho systému boli *rovnaké* (tj. rovnaký celkový prenesený *výkon* bieleho šumu)

$$B[Hz] = \frac{1}{2\pi |H_{max}|^2} \int_0^\infty |H(i\omega)|^2 d\omega$$

(Ekvivalentným ideálnym filtrom je filter s prenosovou charakteristikou $|H(i\omega)| = |H_{max}|$ v intervale B a $|H(i\omega)| = 0$ mimo neho).

Pr.:
Šumová šírka pásma jednopólového ($-20dB/dek$) dolnofrekvenčného filtra (RC)

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \qquad H_{max} = 1$$

(pre RC filter je $\omega_0 = \omega|_{-3dB} = \frac{1}{RC}$)

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \left[\arctan \left\{ \frac{\omega}{\omega_0} \right\} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{2\pi} = \underline{\frac{\pi}{2} \nu_0}$$

Podobným spôsobom sa dá ukázať, že šumová šírka pásmového filtra je $B = \frac{\pi}{2}\Delta\nu$, kde $\Delta\nu$ je určené rozdielom hornej a dolnej $\omega|_{-3dB}$.

Pre filtre vyššieho rádu (viacpólové) sa koeficient $\frac{B}{\Delta\nu}$, resp. $\frac{B}{\nu_0}$ s narastajúcim počtom pólov zmenšuje z hodnoty $\frac{\pi}{2} = 1,57$ k hodnote 1.

5.3.5 Šumová teplota, pomer signál/šum, šumový faktor, šumové číslo

V prípade tepelného šumu sme ukázali, že maximálny šumový výkon dissipatívneho prvku (dodaný do prispôsobenej záťaže) na jednotkový interval frekvencií

$$p = \frac{P_{pz}}{\Delta\nu} = k_B T$$

závisí *len* od teploty. To nám dovoľuje definovať **šumovú teplotu** dissipatívneho prvku/systému ako *jednoznačnú* mieru *dostupného* šumového výkonu. Takto definovaná veličina potom kvantifikuje zdroj šumu, a to *aj v prípade keď charakter šumu nie je tepelný.*

Každý reálny zdroj signálu je súčasne aj zdrojom šumu. Dôležitou charakteristikou reálneho signálu je preto **pomer signál/šum** SNR (*signal to noise ratio*, tiež niekedy označovaný S/N)

$$SNR = \frac{p_S}{p_N}$$

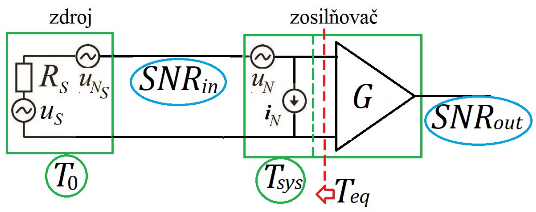
kde p_S, p_N sú výkony signálu a šumu v danom (*tom istom*) frekvenčnom intervale, vyjadrené v lineárnej alebo logaritmickej škále (dB)

$$p(dB) = 10 \log p \qquad SNR(dB) = 10 \log SNR = 10(\log p_S - \log p_N) = p_S(dB) - p_N(dB)$$

Pre *amplitúdy* signálu a šumu, X_S a X_N, platí

$$SNR = \left(\frac{X_S}{X_N}\right)^2 \qquad SNR(dB) = 20 \log \frac{X_S}{X_N}$$

Každý reálny systém, ktorý sa podieľa na spracovaní signálu (filtre, zosilňovače, atď.) je taktiež zdrojom šumu, ktorý sa pridáva k šumu spracovávaného signálu - SNR signálu sa teda *znižuje*. Veľkosť (výkon) tohto dodatočného šumu závisí od koeficientu prenosu (zosilnenia, prenosovej charakteristiky) systému. Ak chceme kvantifikovať šumové vlastnosti systému *nezávisle na jeho zosilnení* (ktoré sa často dá užívateľsky meniť), používame **ekvivalentný šumový model** systému, v ktorom sú všetky vnútorné zdroje šumu "presunuté" na vstup systému v podobe šumovej teploty systému T_{sys}, a podliehajú následnému (principiálne nastaviteľnému) zosilneniu systémom. Celkové šumové vlastnosti sústavy, dané šumom jeho zdroja so šumovou teplotou T_0 *aj* šumom prenosového systému so šumovou teplotou T_{sys} sú potom reprezentované ekvivalentnou šumovou teplotou



$$T_{eq} = T_0 + T_{sys}$$

Šumový faktor systému

$$F = \frac{T_0 + T_{sys}}{T_0} = \frac{T_{eq}}{T_0} = \frac{p_{N_{eq}}}{p_{N_0}}$$

je pomerom celkového *ekvivalentného* šumu na *vstupe* systému $p_{N_{eq}}$ ku šumu z vonkajšieho zdroja na vstupe systému p_{N_0}. Pre ideálny (nešumiaci) systém je $F = 1$. Pre SNR signálu na vstupe a na výstupe systému so zosilnením G platí

$$SNR_{in} = \frac{X_S^2}{X_{N_0}^2} = \frac{p_S}{p_{N_0}} \qquad SNR_{out} = \frac{G \cdot X_S^2}{G \cdot X_{eq}^2} = \frac{G \cdot p_S}{G \cdot p_{N_{eq}}}$$

a teda

$$\frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{p_{N_{eq}}}{p_{N_0}} = F$$

Ak má byť šumový faktor *jednoznačnou* charakteristikou prenosového systému, fixujeme teplotu zdroja signálu $T_0 = 290K$.

Šumové číslo (*noise figure*) je

$$NF = 10 \log F$$

a vyjadruje pokles SNR po prechode signálu systémom *nezávisle* od zosilnenia systému, pri $T_0 = 290K$.

Pre kaskádu prenosových podsystémov so zosilneniemi $G_1, G_2, G_3...$ a šumovými teplotami $T_1, T_2, T_3...$ je šumová teplota celého systému so zosilnením $G_1 G_2 G_3...$

$$T_{sys} = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 G_2} + ...$$

šumové číslo

$$NF = 10 \log \left(1 + \frac{T_{sys}}{290}\right)$$

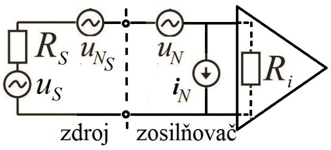
a šumový faktor

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + ...$$

Je zrejmé, že (pri $G_i > 0$) najväčší vplyv na výslednú šumovú teplotu má prvý stupeň, atď.

5.3.6 Šumovový model zosilňovača

Existuje viacero šumových modelov zosilňovačov, založených na "presunutí" *vnútorných* zdrojov šumu *na vstup ideálneho* (nešumiaceho) zosilňovača. Osvedčená je kombinácia zdrojov šumového napätia a prúdu podľa obrázku.



Vnútorný odpor zdroja signálu R_S generuje šum so spektrálnou hustotou výkonu $S_{u_{N_S}} = 4k_BTR_S$. Ekvivalentné zdroje šumového napätia a prúdu zosilňovaca generujú šum s hustotami výkonu $S_{u_{Neq}}$ a $S_{i_{Neq}}$.

Celková spektrálna hustota šumu na vstupe (ideálneho nešumiaceho) zosilňovača je potom (pri $R_i \to \infty$)

$$S_{u_{N_{in}}} = 4k_BTR_S + S_{u_{Neq}} + S_{i_{Neq}} R_S^2$$

a na jeho výstupe (pri zosilnení G)

$$S_{u_{N_{out}}} = GS_{u_{N_{in}}}$$

Ak vstupný odpor zosilňovača $R_i < \infty$, vstupný signál je $u_{S_{in}} = u_S \frac{R_i}{R_i + R_S}$, a vstupný šum je

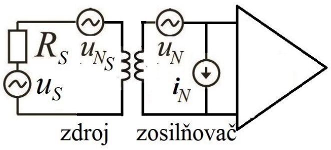
$$S_{u_{N_{in}}} = (4k_BTR_S + S_{u_{Neq}}) \left(\frac{R_i}{R_i + R_S} \right)^2 + S_{i_{Neq}} \left(\frac{R_i R_S}{R_i + R_S} \right)^2$$

Pomer signálu a šumu na výstupe zosilňovača je

$$SNR_{out} = \frac{G^2 u_{S_{in}}^2}{G^2 S_{u_{N_{in}}}} = ... = \frac{u_S^2}{4k_BTR_S + S_{u_{Neq}} + S_{i_{Neq}} R_S^2}$$

a nezávisí od R_i (!)

Pomer signálu ku šumu možno optimalizovať vložením vhodných impedancií/admitancií do vstupného obvodu zosilňovača (napr. admitancia paralelne ku i_N). Pri známych šumových parametroch zosilňovača (uvádzaných výrobcom alebo odhadnutých zo znalosti architektúry zosilňovača) maximalizujeme SNR vzhľadom na tieto vložené prvky. (Výpočty sú pracné, viaceré riešenia sú dostupné na internete.)



Jedným zo spôsobov *šumového prispôsobovania* je vloženie transformátora na vstup zosilňovača. Pri transformačnom pomere $n = \frac{u_2}{u_1}$ sa vnútorný odpor zdroja signálu transformuje ako $n^2 R_S$, a teda

$$S_{u_{N_{in}}} = 4k_BTn^2R_S + S_{u_{Neq}} + S_{i_{Neq}} n^4 R_S^2$$

Potom

$$SNR_{out} = \frac{u_S^2 n^2}{4k_BTn^2R_S + S_{u_{Neq}} + S_{i_{Neq}} n^4 R_S^2}$$

dosahuje maximum pri $p^4 R_S^2 = \frac{S_{u_{Neq}}}{S_{i_{Neq}}}$, čím je určená optimálna hodnota n.

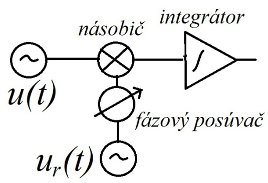
5.3.7 Akumulácia signálu

V prípadoch, keď je možné opakovane registrovať rovnaký signál (napr, ak sa signál mení pomaly v porovnaní s dobou viacnásobného snímania), je výhodné sčítavať opakovane registrovaný signál. Pri n-násobnej akumulácii amplitúda signálu narastie n-násobne (navyše dochádza k "samooprave" prípadných porúch signálu), kým stredná amplitúda šumu narastá len $\sqrt{n}$-krát (kvôli jeho náhodnému charakteru). Pomer signál-šum teda n-násobne narastá. Treba si uvedomiť, že n-násobné predĺženie merania je analogické n-násobnému zúženiu šírky pásma snímania signálu (a šumu).

5.3.8 Fázovo-citlivá detekcia

Hlavným problémom zosilňovania slabých signálov z hľadiska šumov je širokopásmovosť zosilňovačov. Pri šírke pásma $\approx 100kHz$ aj kvalitný zosilňovač s (ekvivalentným) šumovým napätím na vstupe $\approx 5nV/\sqrt{Hz}$ predstavuje celkovú *vstupnú* hladinu šumu (pred zosilnením) $\sqrt{10^5} \cdot 5nV \approx 1.5\mu V$, a teda znemožňuje registrovať slabšie signály. Pridaním (realizovateľného) pásmového filtra s kvalitou $Q \approx 100$ v okolí frekvencie ν_0 sa šírka pásma zúži na $\Delta\nu = \nu_0/Q$, čo napr. pri $\nu_0 = 10kHz$ predstavuje celkové *ekvivalentné* vstupné šumové napätie $\approx 50nV$ (tj. hodnota odpovedajúca výstupnej hladine šumu predelenej zosilnením sústavy). Pre meranie signálov na úrovni jednotiek nV je teda nevyhnutné ďalšie zúženie pásma prenosu.

Riešením je **fázovo-citlivá** (synchrónna) **detekcia** (PSD), založená na násobení meraného signálu $u(t)$ a referenčného signálu $u_r(t)$, a následná integrácia, podľa schémy na obrázku. Sústava prakticky realizuje *korelačnú funkciu* meraného a referenčného signálu



$$u_{out}(t) = \int_0^t u(t')u_r(t-t')dt'$$

Ako integrátor môže v najjednoduchšom prípade slúžiť obyčajný RC-obvod s impulznou charakteristikou $h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$ a časovou konštantou $\tau = RC$ (kap. 4.3.1). Jeho výstupný signál $y(t)$ je konvolúciou $h(t)$ so vstupným signálom $x(t)$

$$y(t) = \int_0^t x(t-t')h(t')dt' \qquad\qquad x(t) = u(t)u_r(t-t')$$

Pre dostatočne veľké τ je $e^{-t/\tau} \cong 1$ po celú dobu integrovania, a $y(t) \cong \frac{1}{\tau}\int_0^t x(t')dt'$.

Vo frekvenčnej oblasti je prenosovou charakteristikou RC-obvodu $H(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega\tau} = \frac{1}{1+i\omega/\omega_h}$, kde $\omega_h = \frac{1}{RC}$ je hraničnou frekvenciou *zhora* obmedzujúcou prenos signálu (dolnofrekvenčný filter). Ak vstupným aj referenčným signálom sú harmonické signály $u(t) = U_S \sin\omega t$ a $u_r(t) = U_r \sin(\omega_r t + \theta)$, potom

$$u(t)u_r(t) = ... = \frac{1}{2}U_S U_r\{\cos([\omega-\omega_r]t-\theta) - \cos([\omega+\omega_r]t+\theta)\}$$

a po integrácii (prechode RC-filtrom) dostávame (s využitím ortogonality funkcie sin) *jednosmerný* výstupný signál

$$U_{out} = \frac{1}{2}U_S U_r \cos\theta \qquad \text{len ak} \qquad \omega_r = \omega$$

Pri fixovanej amplitúde U_r získavame jednosmerné napätie úmerné amplitúde meraného (harmonického) signálu U_S. V skutočnosti (integrujeme *konečný* čas) je výstup nenulový pre $|\omega_r - \omega| < \omega_h$. Ak je vstupný signál zašumený, $u(t) = u_S + u_N$, integrácia $u_r u_N$ dá nenulový príspevok len v intervale $|\omega_r - \omega_N| < 1/\tau$. Pri $\tau \approx 1s$ dostávame (ekvivalentnú) vstupnú hladinu šumu $\approx nV$. Nastavením dostatočne veľkej časovej konštanty integrácie teda vieme extrémne zúžiť šumovú šírku pásma (čo však možno použiť len pre veľmi pomaly sa meniace signály).

Prelaďovaním referenčnej frekvencie ω_r dokážeme teda získať frekvenčné spektrum vstupného signálu. PSD sa často používa v režime, keď referenčným signálom (po prípadnom zosilnení) priamo budíme skúmaný systém, a výstupný signál z neho je (po prípadnom impedančnom prispôsobení) vstupným signálom do PSD. Pridaním druhého PSD s referenčným signálom u_{r2} posunutým voči u_{r1} vo fáze o $\pi/2$ dostávame dvojicu jednosmerných výstupných napätí

$$U_{out1} \sim U_S \cos\theta \qquad U_{out2} \sim U_S \sin\theta \qquad U_S \sim \sqrt{U_{out1}^2 + U_{out2}^2} \qquad \theta = \arctan\frac{U_{out2}}{U_{out1}}$$

Pri správnom sfázovaní dostávame priamo reálnu aj imaginárnu zložku systémovej prenosovej charakteristiky $H(i\omega)$.

Pozn.: V niektorých variantoch PSD je referenčný signál obdĺžnikový, čo znamená, že k výslednému jednosmernému napätiu prispievajú aj vyššie harmonické ω_r s váhou danou fourierovskými koeficientami obdĺžnikového signálu.

6. METÓDY ANALÝZY LINEÁRNYCH SIETÍ

6.1 ANALÝZA AUTONÓMNYCH LINEÁRNYCH SIETÍ

6.1.1 Kirchhoffove zákony

Jednotlivé elektronické prvky (zdroje i spotrebiče) navzájom poprepájané tvoria elektrickú **sieť**. Spojnica troch a viac prvkov sa nazýva **uzol**, úseky medzi uzlami sa nazývajú **vetvy**, a pospájaním úsekov v sieti vznikajú **slučky**. Jednotlivým uzlom priraďujeme elektrický *potenciál* (napätie voči tzv. **referenčnému uzlu**) a jednotlivým vetvám, resp. slučkám priraďujeme *prúd*. Siete nazývame **autonómnymi** ak tvoria uzavretý celok (sú napájané zdrojmi vo vnútri siete). Počet neznámych v sieti s n uzlami a m vetvami je teda $m+n-1$ (jeden z uzlov je referenčný), ale len $m-(n-1)$ vetiev je *nezávislých*, a presne toľko je *nezávislých* slučiek.

Pri analýze siete vychádzame zo *zovšeobecneného Ohmovho zákona* (pre impedancie) a *Kirchhoffových zákonov*

$$U = ZI \qquad\qquad \sum I = 0 \text{ v uzle} \qquad\qquad \sum U = 0 \text{ v slučke}$$

Ak sa v slučke nachádza indukčnosť, dodávame k nej ekvivalentný zdroj indukovaného napätia. Cieľom je identifikovať prúdy (smer a veľkosť) vo všetkých úsekoch, a tým potenciálové spády na všetkých prvkoch. Pritom je *užitočné* (kvôli zníženiu rizika omylu) riadiť sa niekoľkými zásadami:

- V každej vetve určíme šípkou smer *počítaného* prúdu (ak výjde pri výpočte jeho hodnota *záporná*, je smer *skutočného* prúdu opačný).

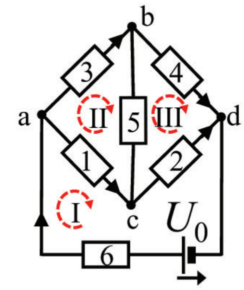
- $n-1$ rovníc (pre uzly) zostavíme z 1. Kirchhoffovho zákona, prúdy *vstupujúce* do uzla počítame ako *kladné*.

- Zvyšných $m-(n-1)$ rovníc zostavíme z 2. Kirchhoffovho zákona. Je pritom vhodné, ak počítame napäťové spády v jednotlivých slučkách v rovnakom zmysle otáčania.

- Napäťové spády na jednotlivých pasívnych prvkoch považujeme za *kladné* ak navrhnutý prúd cez ne má smer otáčania.

- Vnútené napätia (zdroje) považujeme za *kladné* ak sú polarizované v smere otáčania.

• Príklad:



a: $I_6 - I_3 - I_1 = 0$ I: $R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_6 I_6 = U_0$

b: $I_3 - I_4 - I_5 = 0$ II: $R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_1 I_1 = 0$

c: $I_1 + I_5 - I_2 = 0$ III: $R_4 I_4 - R_2 I_2 - R_5 I_5 = 0$

uzol d je referenčný

Neznáme sú prúdy vo vetvách $I_1 - I_6$, počítame sústavu 6 rovníc o 6 neznámych.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & U \\
\end{array}
$$

$$
\left|\begin{array}{cccccc|c}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & R_6 & U_0 \\
-R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\
0 & -R_2 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 & 0
\end{array}\right|
$$

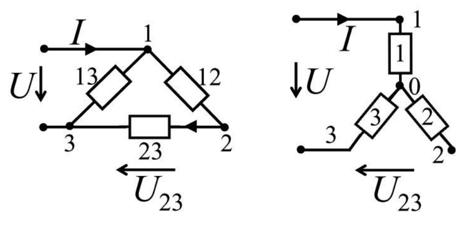
Neznáme $I_k = \frac{D_k}{D}$, kde v D_k sa stĺpec I_k nahradí stĺpcom U.

Pozn.: Tento obvod je *Wheatstonov mostík* na meranie neznámeho odporu (jedného z $R_1 - R_4$). Mostík je *vyvážený* ak $I_5 = 0$, čomu odpovedá $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$.

6.1.2 Transfigurácia siete

Pri analýze siete je niekedy výhodné časti reálnej siete nahradiť *ekvivalentným fiktívnym* zapojením - *transfigurácia*. Najjednoduchším prípadom transfigurácie je náhrada sériového a paralelného zapojenia odporov (impedancií) ekvivalentným výsledným odporom (impedanciou).

Ak v sieti existujú 3 uzly prepojené odpormi do *trojuholníka*, môže sa riešenie uľahčiť premenou trojuholníka na rovnocennú *trojramennú hviezdu*, a naopak. Potenciály uzlov pripojených na okolitú sieť, ani odpory medzi nimi, sa pritom *nezmenia*.



Obe schémy sú k okolitej sieti pripojené v uzloch 1 a 3, v náhradnom hviezdicovom zapojení je uzol 2 *nepripojený* k okolitej sieti - uzly 0 a 2 sú na rovnakom potenciáli (odporom R_2 netečie prúd).

Z $\triangle$: $\frac{U_{23}}{R_{23}} = \frac{U}{R_{12}+R_{23}}$ $\Rightarrow$ $U_{23} = U\frac{R_{23}}{R_{12}+R_{23}}$ z $\star$: $U_{23} = U_{03} = IR_3$

Z $\triangle$: $U = IR = I[R_{13} \parallel (R_{12} + R_{23})]$ $\Rightarrow$ $U_{23} = ... = I\frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$

Porovnaním $\triangle$ a $\star$: $\underline{R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}}$

Analogicky $\underline{R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}}$ $\underline{R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}}$

Spätné vzťahy môžeme odvodiť algebricky, alebo z nasledujúcej úvahy:
Ak by sme v oboch zapojeniach skratovali uzly 2 a 3, tiekol by medzi nimi prúd I_{23}:

Z $\triangle$: $I_{23} = \frac{U}{R_{12}}$

Z $\star$: $U_{03} = \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3} \frac{U}{R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} = U \frac{R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_2+R_1R_3} \quad \Rightarrow \quad I_{23} = \frac{U_{03}}{R_2} = U \frac{R_3}{R_1R_2+R_2R_2+R_1R_3}$

Porovnaním: $\underline{R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}}$

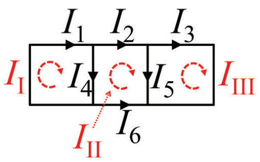
Analogicky $\underline{R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}}$ $\quad$ $\underline{R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}}$

Obecne možno n-ramennú hviezdu nahradiť n-uholníkom, naopak to platí len pre $n = 3$.

Pri *lineárnych aktívnych dvojpóloch* (LAD) často používame aj náhradné schémy podľa Theveninovej, resp. Nortonovej teorémy.

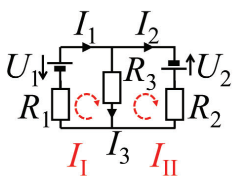
6.1.3 Metóda obvodových prúdov

Namiesto prúdov v jednotlivých úsekoch siete počítame *obvodové prúdy* (OP) v slučkách.



$$I_1 = I_I \qquad I_4 = I_I - I_{II}$$
$$I_2 = I_{II} \qquad I_5 = I_{II} - I_{III}$$
$$I_3 = I_{III} \qquad I_6 = -I_{II}$$

Prúdy vo vetvách sú lineárnou kombináciou obvodových prúdov.



Z 2. Kirchhoffovho zákona:

$$R_1I_I + R_3(I_I - I_{II}) = U_1 \qquad (R_1+R_3)I_I - R_3I_{II} = U_1$$
$$R_2I_{II} + R_3(I_{II} - I_I) = U_2 \qquad -R_3I_I + (R_2+R_3)I_{II} = U_2$$

Vo všeobecnosti dostávame sústavu nehomogénnych algebrických rovníc

$$r_{11}I_I + r_{12}I_{II} + ...r_{1s}I_s = -U_{11}$$
$$...$$
$$r_{s1}I_I + r_{s2}I_{II} + ...r_{ss}I_s = -U_{ss}$$

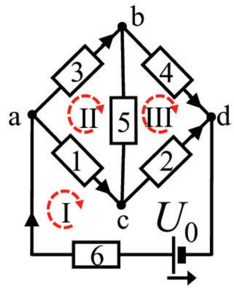
kde

$r_{ii} = \sum R_i$ (> 0 !) v i-tej slučke

$r_{ij} = r_{ji}$ - odpory spoločné i-tej a j-tej slučke
 $r_{ij} > 0$ ak i-tý a j-tý obvodový prúd majú *rovnaký smer cez daný odpor*
 $r_{ij} < 0$ ak i-tý a j-tý obvodový prúd majú *opačný smer cez daný odpor*

U_{ii} - *algebrický* súčet (tj. s ohľadom na polaritu) napätí v i-tej slučke
 znamienko + ak smer napätia a i-tého obvodového prúdu sú *rovnaké*
 znamienko - ak smer napätia a i-tého obvodového prúdu sú *rôzne*

• Príklad

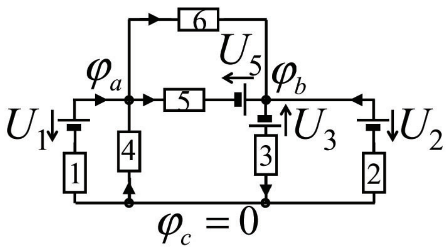


$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} I_I & I_{II} & I_{III} & U \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc|c}
R_1+R_2+R_6 & -R_1 & -R_2 & U_0 \\
-R_1 & R_1+R_3+R_5 & -R_5 & 0 \\
-R_2 & -R_5 & R_2+R_4+R_5 & 0
\end{array}\right|
\end{array}
$$

vyváženie mostíka $\quad I_5 = I_{II} - I_{III} = \frac{D_2 - D_3}{D} = 0$

6.1.4 Metóda uzlových potenciálov

Prúdy v jednotlivých úsekoch sú dané *rozdielmi potenciálov uzlov* (UP) vymedzujúcich úsek. Potenciál zvoleného referenčného uzla = 0.



$$
\begin{aligned}
\varphi_a - \varphi_c &= \varphi_a = U_1 - R_1 I_1 \\
\varphi_a - \varphi_c &= \varphi_a = -R_4 I_4 \\
\varphi_a - \varphi_b &= R_6 I_6 \\
\varphi_a - \varphi_b &= -U_5 + R_5 I_5 \\
\varphi_b - \varphi_c &= \varphi_b = -U_3 - R_3 I_3 \\
\varphi_b - \varphi_c &= \varphi_b = U_2 - R_2 I_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (U_1 - \varphi_a) G_1 \\
I_4 &= -\varphi_a G_4 \\
I_6 &= (\varphi_a - \varphi_b) G_6 \\
I_5 &= (\varphi_a - \varphi_b + U_5) G_5 \\
I_3 &= (U_3 + \varphi_b) G_3 \\
I_2 &= (U_2 - \varphi_b) G_2
\end{aligned}
$$

Odpory (impedancie) nahrádzame vodivosťami (admitanciami).

Z 1. Kirchhoffovho zákona:

Pre uzol a: $\quad I_1 + I_4 - I_5 - I_6 = 0$

Pre uzol b: $\quad I_2 + I_5 + I_6 - I_3 = 0$

Po dosadení:

$(G_1 + G_4 + G_5 + G_6)\varphi_a - (G_5 + G_6)\varphi_b = G_1 U_1 - G_5 U_5$

$-(G_5 + G_6)\varphi_a + (G_2 + G_3 + G_5 + G_6)\varphi_b = G_2 U_2 - G_3 U_3 + G_5 U_5$

Vo všeobecnosti dostávame sústavu nehomogénnych algebrických rovníc

$$
\begin{gathered}
g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - \ldots - g_{1s}\varphi_s = \textstyle\sum_1 GU, I \\
\ldots \\
-g_{s1}\varphi_1 - g_{s2}\varphi_2 - \ldots + g_{ss}\varphi_s = \textstyle\sum_s GU, I
\end{gathered}
$$

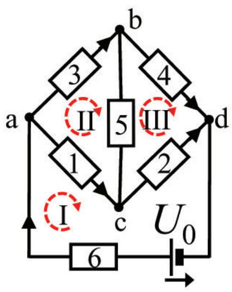
kde

$g_{ii} = \sum G_i$ (> 0 !) *prostý* súčet všetkých vodivostí zbiehajúcich sa do uzla i

$g_{ij} = g_{ji}$ - *prostý* súčet vodivostí medzi i-tým a j-tým uzlom

$\sum_i GU, I$ - *algebrický* súčet súčinov vodivostí a napätí zdrojov, resp. prúdov zdrojov, zbiehajúcich sa do uzla i
znamienko + ak prúd *zo zdroja* smeruje *do* uzla
znamienko - ak prúd *zo zdroja* smeruje *od* uzla

• Príklad

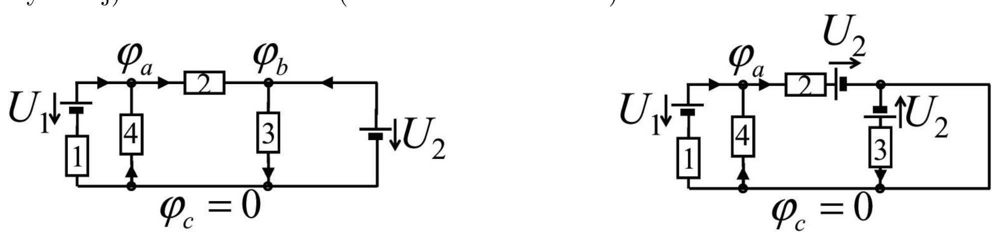


uzol d je referenčný

$$\begin{array}{ccc|c} \varphi_a & \varphi_b & \varphi_c & \sum GU \\ G_1+G_3+G_6 & -G_3 & -G_1 & G_6U_0 \\ -G_3 & G_3+G_4+G_5 & -G_5 & 0 \\ -G_1 & -G_5 & G_1+G_2+G_5 & 0 \end{array}$$

vyváženie mostíka $\qquad \varphi_b-\varphi_c=\frac{D_b-D_c}{D}=0$

Ak sa v úseku slučky nachádza ideálny zdroj napätia, zapojenie sa nezmení pri presunutí tohto zdroja na ľubovoľné miesto slučky tak, aby sa súčet potenciálových spádov v *žiadnej* (pomyselnej) slučke nezmenil (2. Kirchhoffov zákon).

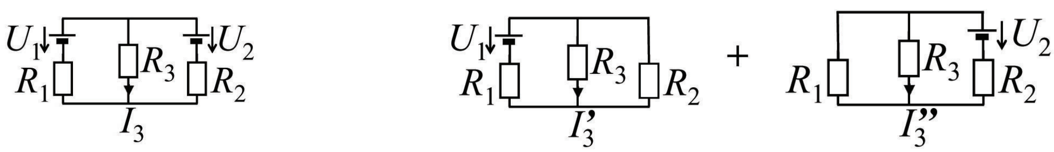


Transformáciou na obrázku sa uzly b a c stotožnia - počet neznámych potenciálov sa teda *redukuje*.

6.1.5 Princíp superpozície

Ak je *lineárny* systém vystavený pôsobeniu viacerých *nezávislých* signálov, odozva systému je *superpozíciou* odoziev na jednotlivé signály. Prúdy v jednotlivých úsekoch siete obsahujúcej viac zdrojov sú *algebrickými* súčtami prúdov od jednotlivých zdrojov. Čiastkový prúd od daného zdroja počítame pri vyradených ostatných zdrojoch (tj. nahradených ich vnútornými odpormi).

• Príklad $\quad I_3 = ?$



I_3' : $\quad I_1=\frac{U_1}{R_1+R_2||R_3} \qquad I_1R_2||R_3=I_3'R_3 \qquad I_3'=\frac{U_1R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

I_3'' : $\quad I_2=\frac{U_2}{R_2+R_1||R_3} \qquad I_2R_1||R_3=I_3''R_3 \qquad I_3''=\frac{U_2R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

$I_3=I_3'+I_3''$

Metódy OP a UP sú výhodné v prípadoch sietí budených zdrojmi rovnakého časového priebehu (jednosmernými alebo harmonickými s rovnakou frekvenciou), sú však nepoužiteľné pre zdroje rôznych časových priebehov - jedinou použiteľnou metódou je vtedy princíp superpozície.

6.1.6 Siete so striedavým napájaním

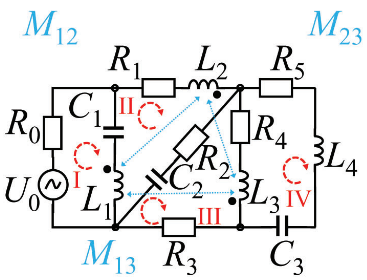
Pri sieťach obsahujúcich zdroje *striedavého* napätia (prúdu) a *reaktívne* prvky (cievky, kondenzátory) je vhodné používať komplexné veličiny - znamená to prechod od odporov k *impedanciám* (zahrňujúcim aj impedancie reaktívnych prvkov). Pri metódach OP a UP nahrádzame matice odporov, resp. vodivostí *impedančnými*, resp. *admitančnými maticami*. Vzhľadom na to, že impedancie sa skladajú ako odpory (sériové a paralelné zapojenia), výhodnejšie je pracovať s impedanciami namiesto admitancii, čo uprednostňuje metódu OP.

Impedančná matica v metóde OP má teda štruktúru:

z_{ii} - súčet všetkých impedancií i-tej slučky
$\pm i\omega 2M$ pre každú *dvojicu* magneticky viazaných cievok v i-tej slučke
($\pm$ pri rovnakej/nerovnakej orientácii voči príslušnému obvodovému prúdu)

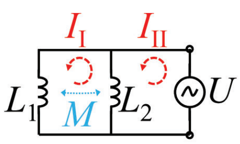
$z_{ij} = z_{ji}$ - súčet všetkých impedancií *v spoločnom úseku* i-tej a j-tej slučky
(so znamienkom $\pm$ pri rovnakej/nerovnakej orientácii obvodových prúdov v úseku)
$\pm i\omega 2M$ pre každú *dvojicu* magneticky viazaných cievok v spoločnom úseku
($\pm$ podľa *vzájomnej* orientácie cievok)
$\pm i\omega M_{ij}$ pre jednu zo *vzájomne* viazaných cievok v i-tej a druhú v j-tej slučke
($\pm$ pri rovnakej/nerovnakej orientácii cievky voči *príslušnému* obvodovému prúdu)

• Príklad



$z_{11} = R_0 + \frac{1}{i\omega C_1} + i\omega L_1$
$z_{22} = R_1 + R_2 + \frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} + i\omega(L_1 + L_2 + 2M_{12})$
$z_{33} = R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{i\omega C_2} + i\omega L_3$
$z_{44} = R_4 + R_5 + \frac{1}{i\omega C_3} + i\omega(L_3 + L_4)$
$z_{12} = -\frac{1}{i\omega C_1} - i\omega(L_1 + M_{12})$
$z_{13} = -i\omega M_{13}$ $\quad z_{14} = i\omega M_{13}$
$z_{23} = -R_2 - \frac{1}{i\omega C_2} + i\omega(M_{13} + M_{23})$
$z_{24} = -i\omega(M_{13} + M_{23})$ $\quad z_{34} = -R_4 - i\omega L_3$

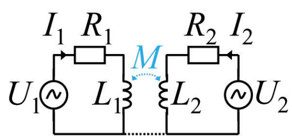
• Skladanie *viazaných* cievok



$z_{11}I_I + z_{12}I_{II} = 0$
$z_{21}I_I + z_{22}I_{II} = U$

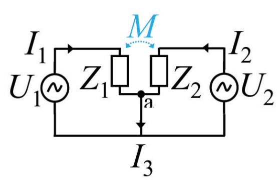
$z_{11} = i\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)$
$z_{22} = i\omega L_2$
$z_{12} = z_{21} = -i\omega(L_2 \pm M)$
($\pm$ podľa väzby cievok)

• Náhradná schéma transformátora



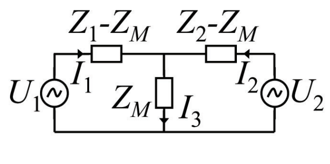
(schéma sa *nezmení* prepojením spodných pólov oboch cievok).

$U_1 = (R_1 + i\omega L_1)I_1 + i\omega M I_2$
$U_2 = i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2$



(náhradná schéma)

$Z_{1,2} = R_{1,2} + i\omega L_{1,2}$
$I_1 + I_2 - I_3 = 0$



(náhradná schéma)

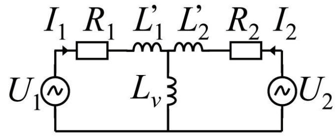
$Z_M = \pm i\omega M$ (súhlasne/nesúhlasne vinuté cievky)

$$U_1 = Z_1 I_1 + Z_M I_2 = Z_1 I_1 + Z_M(I_3 - I_1) = \\ = (Z_1 - Z_M) I_1 + Z_M I_3$$

$$U_2 = Z_M I_1 + Z_2 I_2 Z_M(I_3 - I_2) + Z_2 I_2 = \\ = (Z_2 - Z_M) I_2 + Z_M I_3$$

čomu odpovedá konečná náhradná schéma

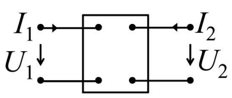
$L_1' = L_1 \mp M \qquad L_2' = L_2 \mp M \qquad L_v = \pm M$



6.2 ANALÝZA NEAUTONÓMNYCH LINEÁRNYCH SIETÍ

6.2.1 Matice štvorpólov

Neautonómne siete, ako súčasti väčších celkov slúžiacich na prenos a spracovanie signálov, sú napájané externými zdrojmi signálov na *vstupných* svorkách, a signál z nich je odoberaný na *výstupných* svorkách. Môžu byť *aktívne* alebo *pasívne*, podľa toho či obsahujú alebo neobsahujú *aktívne* prvky (zdroje energie). Nezaujímame sa pritom o prúdy v jednotlivých úsekoch neautonómnych sietí, ale o *súbor prenosových charakteristík* medzi vstupom a výstupom.



Ľubovoľnú dvojicu z premenných U_1, I_1, U_2, I_2 môžeme definovať ako *nezávislé* premenné, a zvyšnú dvojicu ako *závislé* premenné, a na základe tohto výberu zostavíme príslušnú sústavu rovníc.

• **Impedančné rovnice**

$U_1 = f_1(I_1, I_2) = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$ Systém je opísaný *impedančnou maticou.*

$U_2 = f_2(I_1, I_2) = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$

$Z_{11} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{I_2=0}$ *vstupná impedancia* pri výstupe *naprázdno*

$Z_{12} = \left(\frac{U_1}{I_2}\right)_{I_1=0}$ *spätná impedancia* pri vstupe *naprázdno*

$Z_{21} = \left(\frac{U_2}{I_1}\right)_{I_2=0}$ *prevodová impedancia* pri výstupe *naprázdno*

$Z_{22} = \left(\frac{U_2}{I_2}\right)_{I_1=0}$ *výstupná impedancia* pri vstupe *naprázdno*

• **Admitančné rovnice**

$I_1 = f_1(U_1, U_2) = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2$ Systém je opísaný *admitančnou maticou.*

$I_2 = f_2(U_1, U_2) = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2$

$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{U_1}\right)_{U_2=0}$ *vstupná admitancia* pri výstupe *nakrátko*

$Y_{12} = \left(\frac{I_1}{U_2}\right)_{U_1=0}$ *spätná admitancia* pri vstupe *nakrátko*

$Y_{21} = \left(\frac{I_2}{U_1}\right)_{U_2=0}$ *prevodová admitancia* pri výstupe *nakrátko*

$Y_{22} = \left(\frac{I_2}{U_2}\right)_{U_1=0}$ *výstupná admitancia* pri vstupe *nakrátko*

• **Kaskádne rovnice**

Pri kaskádnych rovniciach je smer I_2 *opačný* než v ostatných systémoch a na schéme.

$U_1 = f_1(U_2, I_2) = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$ Systém je opísaný *kaskádnou maticou.*

$I_1 = f_2(U_2, I_2) = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$

$A_{11} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)_{I_2=0}$ *obrátený prenos napätia* pri výstupe *naprázdno*

$A_{12} = \left(\frac{U_1}{I_2}\right)_{U_2=0}$ *spätná impedancia* pri výstupe *nakrátko*

$A_{21} = \left(\frac{I_1}{U_2}\right)_{I_2=0}$ *spätná admitancia* pri výstupe *naprázdno*

$A_{22} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)_{U_2=0}$ *obrátený prenos prúdu* pri výstupe *nakrátko*

• **Hybridné rovnice**

$U_1 = f_1(I_1, U_2) = h_{11}I_1 + h_{12}U_2$ Systém je opísaný *hybridnou maticou.*

$I_2 = f_2(I_1, U_2) = h_{21}I_1 + h_{22}U_2$

$h_{11} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{U_2=0}$ *vstupná impedancia* pri výstupe *nakrátko*

$h_{12} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)_{I_1=0}$ *spätný prenos napätia* pri vstupe *naprázdno*

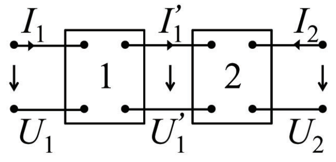
$h_{21} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{U_2=0}$ *prenos prúdu* pri výstupe *nakrátko*

$h_{22} = \left(\frac{I_2}{U_2}\right)_{I_1=0}$ *výstupná admitancia* pri vstupe *naprázdno*

Medzi prvkami jednotlivých matíc (tj. koeficientami systémov rovníc) existujú prevodné tabuľky (Dodatok C).

6.2.2 Skladanie štvorpólov

• Pri spájaní štvorpólov podľa schémy na obrázku je vhodné použiť *kaskádne* rovnice.



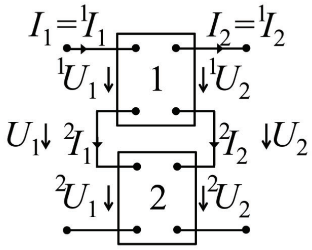
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1A_{11} & {}^1A_{12} \\ {}^1A_{21} & {}^1A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' \\ I_1' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ I_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2A_{11} & {}^2A_{12} \\ {}^2A_{21} & {}^2A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1A_{11} & {}^1A_{12} \\ {}^1A_{21} & {}^1A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2A_{11} & {}^2A_{12} \\ {}^2A_{21} & {}^2A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Kaskádna matica *výsledného* štvorpólu je teda $\underline{\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2A \end{pmatrix}}$

• Pri spájaní štvorpólov podľa schémy na obrázku je vhodné použiť *impedančné* rovnice.



$$I_1 = {}^1I_1 = {}^2I_1 \qquad U_1 = {}^1U_1 + {}^2U_1$$

$$I_2 = {}^1I_2 = {}^2I_2 \qquad U_2 = {}^1U_2 + {}^2U_2$$

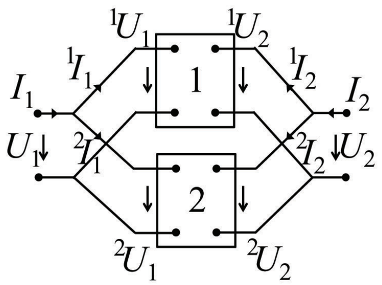
$$Z_{11} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{I_2=0} = \frac{{}^1U_1 + {}^2U_1}{I_1} = \frac{{}^1U_1}{{}^1I_1} + \frac{{}^2U_1}{{}^2I_1} = {}^1Z_{11} + {}^2Z_{11}$$

$$Z_{12} = \left(\frac{U_1}{I_2}\right)_{I_1=0} = \frac{{}^1U_1 + {}^2U_1}{I_2} = \frac{{}^1U_1}{{}^1I_2} + \frac{{}^2U_1}{{}^2I_2} = {}^1Z_{12} + {}^2Z_{12}$$

atď.

Impedančná matica *výsledného* štvorpólu je teda $\underline{\left(Z \right) = \left({}^1Z \right) + \left({}^2Z \right)}$

• Pri spájaní štvorpólov podľa schémy na obrázku je vhodné použiť *admitančné* rovnice.



$$I_1 = {}^1I_1 + {}^2I_1 \qquad U_1 = {}^1U_1 = {}^2U_1$$

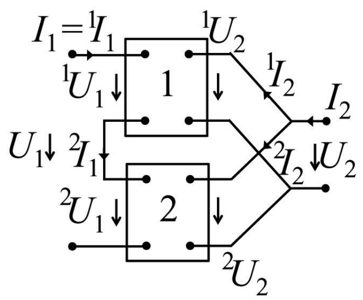
$$I_2 = {}^1I_2 + {}^2I_2 \qquad U_2 = {}^1U_2 = {}^2U_2$$

$$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{U_1}\right)_{U_2=0} = \frac{{}^1I_1 + {}^2I_1}{U_1} = \frac{{}^1I_1}{{}^1U_1} + \frac{{}^2I_1}{{}^2U_1} = {}^1Y_{11} + {}^2Y_{11}$$

atď.

Admitančná matica *výsledného* štvorpólu je teda $\underline{\left(Y \right) = \left({}^1Y \right) + \left({}^2Y \right)}$

• Pri spájaní štvorpólov podľa schémy na obrázku je vhodné použiť *hybridné* rovnice.



$$I_1 = {}^1I_1 = {}^2I_1 \qquad U_1 = {}^1U_1 + {}^2U_1$$

$$I_2 = {}^1I_2 + {}^2I_2 \qquad U_2 = {}^1U_2 = {}^2U_2$$

$$h_{11} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{U_2=0} = \frac{{}^1U_1 + {}^2U_1}{I_1} = \frac{{}^1U_1}{{}^1I_1} + \frac{{}^2U_1}{{}^2I_1} = {}^1h_{11} + {}^2h_{11}$$

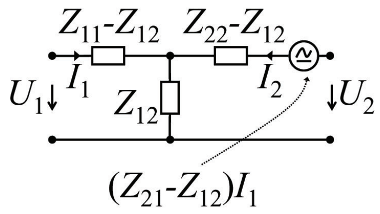
atď.

Hybridná matica *výsledného* štvorpólu je teda $\underline{\left(h \right) = \left({}^1h \right) + \left({}^2h \right)}$

6.2.3 Náhradné schémy štvorpólov

Impedančná sústava rovníc sa dá (pridaním nuly) prepísať do tvaru

$U_1 = (Z_{11}-Z_{12})I_1+Z_{12}(I_1+I_2)$ $\qquad$ $U_2 = (Z_{21}-Z_{12})I_1+(Z_{22}-Z_{12})I_2+Z_{12}(I_1+I_2)$



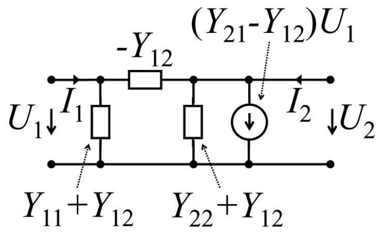
čomu odpovedá náhradná schéma. *Ľubovoľný* štvorpól možno nahradiť T-článkom podľa tejto schémy.

Ak je štvorpól *pasívny*, $Z_{12} = Z_{21}$, a zdroj napätia vymizne.

Admitančná sústava rovníc sa dá (pridaním nuly) prepísať do tvaru

$I_1 = (Y_{11}+Y_{12})U_1-Y_{12}(U_1-U_2)$ $\qquad$ $I_2 = (Y_{21}-Y_{12})U_1+(Y_{22}+Y_{12})U_2-Y_{12}(U_2-U_1)$

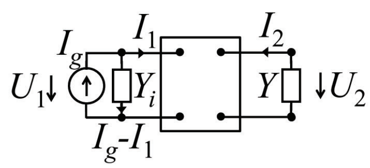
(znamienko - pri Y_{12} v posledných členoch korešponduje kladnému prúdu v smere potenciálového spádu)



čomu odpovedá náhradná schéma. *Ľubovoľný* štvorpól možno nahradiť π-článkom podľa tejto schémy.

Ak je štvorpól *pasívny*, $Y_{12} = Y_{21}$, a zdroj prúdu vymizne.

6.2.4 Prenosové funkcie štvorpólov



Prenos napätia $\quad K_U = \frac{U_2}{U_1}$

Z admitančných rovníc a schémy:

$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 = -U_2Y \qquad \Rightarrow \qquad \underline{K_U = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}+Y}}$

Prenos napätia *naprázdno* $(Y \to 0)$: $\qquad K_{U_0} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$

Vstupná admitancia $\quad Y_{in} = \frac{I_1}{U_1}$

Z admitančných rovníc a schémy:

$Y_{in} = \frac{I_1}{U_1} = Y_{11} + Y_{12}\frac{U_2}{U_1} = Y_{11} + Y_{12}K_U = \underline{Y_{11} - Y_{12}\frac{Y_{21}}{Y_{22}+Y}}$

Pri výstupe *naprázdno* $(Y \to 0)$: $\qquad Y_{in_0} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}}$

Pri výstupe *nakrátko* $(Y \to \infty)$: $\qquad Y_{in_\infty} = Y_{11}$

Výstupná admitancia *bez budenia* ($I_g = 0$, zdroj reprezentovaný Y_i) $\qquad Y_{out} = \frac{I_2}{U_2}$

Z admitančných rovníc a schémy:

$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 = -U_1Y_i \qquad \Rightarrow \qquad U_1 = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}+Y_i}U_2$

$I_2 = -Y_{21}\frac{Y_{12}}{Y_{11}+Y_i}U_2 + Y_{22}U_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Y_{out} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}+Y_i}}$

Pri vstupe *naprázdno* $(Y_i \to 0)$: $\qquad Y_{out_0} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}}$

Pri vstupe *nakrátko* $(Y_i \to \infty)$: $\qquad Y_{out_\infty} = Y_{22}$

Prenos prúdu $\quad K_I = -\frac{I_2}{I_1}$

Z admitančných rovníc a schémy:
$K_I = -\frac{Y_{21}U_1+Y_{22}U_2}{Y_{11}U_1+Y_{12}U_2} = -\frac{Y_{21}+Y_{22}K_U}{Y_{11}+Y_{12}K_U} = -\underline{\frac{Y_{21}Y}{D_Y+Y_{11}Y}}$ $\qquad$ (D_Y - determinant admit. matice)

Pri výstupe *nakrátko* $(Y \to \infty)$: $\qquad K_{I_\infty} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$

6.2.5 Určovanie maticových prvkov meraním

Predpokladajme *pasívnu* sieť reprezentovanú kaskádnymi rovnicami

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$$
$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

Prvky kaskádnej matice sú:
$A_{11} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)_{I_2=0}$ (výstup naprázdno)
$A_{12} = \left(\frac{U_1}{I_2}\right)_{U_2=0}$ (výstup nakrátko)
$A_{21} = \left(\frac{I_1}{U_2}\right)_{I_2=0}$ (výstup naprázdno)
$A_{22} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)_{U_2=0}$ (výstup nakrátko)

Odpor vstupu pri výstupe naprázdno je $\quad R_{10} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{I_2=0} = ... = \frac{A_{11}}{A_{21}}$

Odpor vstupu pri výstupe nakrátko je $\quad R_{1k} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{U_2=0} = ... = \frac{A_{12}}{A_{22}}$

Výstupný odpor vieme vyjadriť pomocou *obráteného* kaskádneho systému (zámenou vstupu a výstupu) s uvážením, že pre determinant kaskádnej matice lineárneho *pasívneho* štvorpólu platí $D = 1$.

$$U_2 = \frac{D_1}{D} = ... = A_{22}U_1 - A_{12}I_1 \qquad \to \qquad U_2 = A_{22}U_1 + A_{12}I_1$$
$$I_2 = \frac{D_2}{D} = ... = -A_{21}U_1 + A_{11}I_1 \qquad \to \qquad I_2 = A_{21}U_1 + A_{11}I_1$$

Obrátením systému sa mení smer prúdov (zmena znamienka pri prúdoch).

Odpor výstupu pri vstupe naprázdno je $\quad R_{20} = \left(\frac{U_2}{I_2}\right)_{I_1=0} = ... = \frac{A_{22}}{A_{21}}$

Odpor výstupu pri vstupe nakrátko je $\quad R_{2k} = \left(\frac{U_2}{I_2}\right)_{U_1=0} = ... = \frac{A_{12}}{A_{11}}$

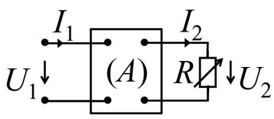
Kombináciou týchto vzťahov dostávame

$$A_{11} = \frac{R_{10}}{\sqrt{R_{20}(R_{10} - R_{1k})}} \qquad A_{12} = \frac{R_{1k}R_{20}}{\sqrt{R_{20}(R_{10} - R_{1k})}}$$
$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{R_{20}(R_{10} - R_{1k})}} \qquad A_{22} = \frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}(R_{10} - R_{1k})}}$$

Hodnoty vstupného a výstupného odporu štvorpólu môžme určiť *meraním*.

Analogickým postupom, alebo pomocou prevodovej tabuľky, možno určiť maticové prvky v ktoromkoľvek systéme.

6.2.6 Účinnosť prispôsobenia zaťaženého štvorpólu



Účinnosť prispôsobenia zaťaženého štvorpólu je daná pomerom výkonu na záťaži ku príkonu na vstupe

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} \qquad \mathcal{P}_1 = U_1 I_1 \qquad \mathcal{P}_2 = U_2 I_2 \qquad U_2 = R I_2$$

Prispôsobenie teda možno meniť nastavením hodnoty záťaže R, v opise prostredníctvom kaskádnych rovníc

$$\eta = \frac{U_2 I_2}{(A_{11}U_2 + A_{12}I_2)(A_{21}U_2 + A_{22}I_2)} = ... = \frac{R}{A_{11}A_{21}R^2 + A_{12}A_{22} + (A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21})R}$$

Maximalizácia η : $\quad \frac{d\eta}{dR} = 0 \quad R = \sqrt{\frac{A_{12}A_{22}}{A_{11}A_{21}}} = \underline{\sqrt{R_{20}R_{2k}}}$

6.2.7 Metóda uzlových potenciálov v neautonómnych prenosových sieťach

Predpokladajme lineárnu prenosovú (neautonómnu) sieť opísanú metódou UP

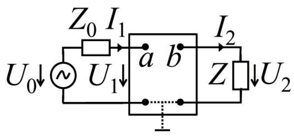
$$g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - ... - g_{1k}\varphi_k = \textstyle\sum_1 GU, I = I_{\mu 1}$$
$$...$$
$$-g_{k1}\varphi_1 - g_{k2}\varphi_2 - ... + g_{kk}\varphi_k = \textstyle\sum_k GU, I = I_{\mu k}$$

Potenciál j-teho uzla sa vypočíta ako

$$\varphi_j = \frac{D_j}{D} = \frac{D_{1j}}{D} I_{\mu 1} + ... + \frac{D_{kj}}{D} I_{\mu k} \qquad \text{(rozvoj podľa } j\text{-teho stĺpca)}$$

kde D_{kj} sú doplnky k determinantu sústavy (vyškrtnutý j-tý stĺpec a k-tý riadok), pričom $\text{sign} D_{kj} = (-1)^{k+j}$.

Spomedzi všetkých uzlov 1 pár tvorí *vstup* systému a 1 pár tvorí *výstup* systému. Často majú oba páry jeden uzol *spoločný* (zvykne byť zemnený) - je vhodné považovať ho za *referenčný*.



a - vstupný uzol $\qquad \varphi_a = U_1$

b - výstupný uzol $\qquad \varphi_b = U_2$

Potenciály uzlov a, b podľa metódy UP sú

$$U_1 = \frac{D_{aa}}{D} I_1 - \frac{D_{ba}}{D} I_2 \qquad U_2 = \frac{D_{aa}}{D} I_1 - \frac{D_{bb}}{D} I_2 \qquad \text{pričom} \qquad U_2 = Z I_2$$

(I_2 smeruje *od* uzla - formálne je to sústava impedančných rovníc s opačným smerom I_2 , predpokladáme, že vnútri siete niet nezávislých prúdových zdrojov.)

Prenosové funkcie potom možno vypočítať nasledovným spôsobom:

Prenos prúdu $\qquad K_I = \frac{I_2}{I_1} = ... = \underline{\frac{D_{ab}}{D_{bb} + Z D}}$

pri výstupe nakrátko $\qquad K_I = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{Z=0} = \frac{D_{ab}}{D_{bb}}$

Prenos napätia $\qquad K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{D_{ab}}{D} I_1 - \frac{D_{bb}}{D} I_2}{\frac{D_{aa}}{D} I_1 - \frac{D_{ba}}{D} I_2} = ... = \underline{\frac{D_{ab} Z}{D_{aa,bb} + D_{aa} Z}}$

$(D_{aa}D_{bb} - D_{ab}D_{ba} = D \cdot D_{aa,bb})$
($D_{aa,bb}$ - subdeterminant 2. rádu, vyškrtnutý riadok aj stĺpec a aj b)

pri výstupe naprázdno $\qquad K_U = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{Z=\infty} = \frac{D_{ab}}{D_{aa}}$

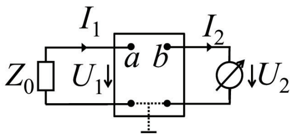
Vstupná impedancia $\qquad Z_{in} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{D_{aa}}{D} - \frac{D_{ba}}{D} K_I = ... = \underline{\frac{D_{aa,bb}+D_{aa}Z}{D_{bb}+DZ}}$

pri výstupe naprázdno $\qquad (Z_{in})_{Z=\infty} = \frac{D_{aa}}{D}$

pri výstupe nakrátko $\qquad (Z_{in})_{Z=0} = \frac{D_{aa,bb}}{D_{bb}}$

(Pre ideálnu prenosovú sieť je $Z_{in} = 0$, potom $U_1 = U_0$.)

Výstupná impedancia



$U_0 = 0$, vstupný okruh uzatvorený Z_0
$I_1 = -\frac{U_1}{Z_0}$

$Z_{out} = -\frac{U_2}{I_2} = ... = \underline{\frac{D_{aa,bb}+D_{bb}Z_0}{D_{aa}+DZ_0}}$ $\qquad (Z_{out})_{Z_0=0} = \frac{D_{aa,bb}}{D_{aa}}$ $\qquad (Z_{out})_{Z_0=\infty} = \frac{D_{bb}}{D}$

Z_{out} prenosovej siete odpovedá náhradnej impedancii Z_N v Theveninovej náhradnej schéme,
pre ktorú $U_N = (U_2)_{Z=\infty} = \frac{D_{ab}}{D} I_1 = ... = U_0 \frac{D_{ab}}{D_{aa}+DZ_0}$ $\qquad (U_1 = U_0 - Z_0 I_1)$

Prenosová impedancia $\qquad Z_p = \frac{U_2}{I_1} = ... = \underline{\frac{D_{ab}Z}{D_{bb}+DZ}}$

Prenosová admitancia $\qquad Y_p = \frac{I_2}{U_1} = ... = \underline{\frac{D_{ab}}{D_{aa,bb}+D_{aa}Z}}$

DODATKY

A Slovník Laplaceovej transformácie

$\frac{a}{s}$	a
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n $\quad n$ – prirodzené č.
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at} $\quad a$ – komplexné č.
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$, $a \neq b$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$
$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\sinh\omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$
$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh\omega t$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^2}\left(e^{-at} + at - 1\right)$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^2}\left(1 - e^{-at} - ate^{-at}\right)$
$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$, $a \neq b$, $a, b \neq 0$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(a-b)\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)}$
$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$
$\frac{1}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{a^2+\omega^2}\left(e^{-at} + \frac{a}{\omega}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$, $a \neq b \neq c$	$\frac{1}{(b-a)(c-a)}e^{-at} + \frac{1}{(a-b)(c-b)}e^{-bt} + \frac{1}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$, $a \neq b$	$\frac{1}{(a-b)^2}\left\{e^{-at} - [1 + (b-a)t]e^{-bt}\right\}$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} - \frac{\sin\omega t}{\omega^3}$
$\frac{1}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}e^{-at}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
$\frac{1}{s^2(s+a)^2}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^2}te^{-at} + \frac{2}{a^3}e^{-at}$
$\frac{1}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)$
$\frac{1}{s(s+a)^3}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^3} - \left(\frac{t^2}{2a} + \frac{t}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right)e^{-at}$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} - \frac{\sin\omega t}{\omega^3}$
$\frac{1}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sinh\omega t - \sin\omega t)$
$\frac{1}{s^3(s^2+\omega^2)}$	$\frac{t^2}{2\omega^2} - \frac{cos\omega t-1}{\omega^4}$
$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{\omega^4}(1 - \cos\omega t) - \frac{1}{2\omega^3}t\sin\omega t$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)^2}$, $a \neq b$, $a, b \neq 0$	$\frac{1}{ab^2} - \frac{e^{-at}}{a(a-b)^2} - \left[\frac{t}{b(a-b)} + \frac{a-2b}{b^2(a-b)^2}\right]e^{-bt}$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{3}{2\omega^5}\sin\omega t + \frac{1}{2\omega^4}t\cos\omega t + \frac{1}{\omega^4}t$
$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$, $a \neq b$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$
$\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$
$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}t\sin\omega t$
$\frac{s}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2}[\cosh\omega t - \cos\omega t]$
$\frac{s^2}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega}[\sinh\omega t + \sin\omega t]$
$\frac{s^3}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2}[\cosh\omega t + \cos\omega t]$
$\frac{s+a}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$ $\quad \phi = \arctan\frac{\omega}{a}$
$\frac{s+a}{(s+b)^2+\omega^2}$	$\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{\omega^2}}e^{-bt}\sin(\omega t + \phi)$ $\quad \phi = \arctan\frac{\omega}{a-b}$
$\frac{s+a}{s(s+b)^2}$, $a, b \neq 0$	$\frac{a}{b}\left[\left(1 - \frac{a}{b}\right)t - \frac{b}{a^2}\right]e^{-bt}$

B Bodeho grafy

Frekvenčná charakteristika systému n-tého rádu sa dá vyjadriť v tvare

$$H(i\omega) = K\frac{()()...}{()()...}$$

kde () sú výrazy (koreňové činitele polynómu) typu $(1 \pm i\omega T)$, $(i\omega)$ alebo $(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega)$.

$|H(i\omega)| = K\frac{|()||()|...}{|()||()|...}$, $\quad 20\log|H(i\omega)| = 20\log K + \sum_{\text{čit}} 20\log|()| - \sum_{\text{men}} 20\log|()|$

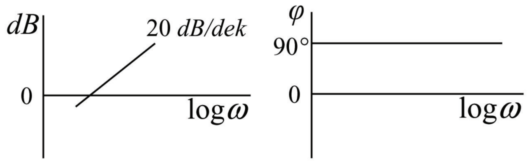
Pomer amplitúd výstupného a referenčného (vstupného) signálu sa spravidla udáva v logaritmickej škále v decibeloch (dB): $10\log\left(\frac{A}{A_r}\right)^2 = 20\log\frac{A}{A_r}$.

Celkový fázový posun φ je súčtom fázových posunov všetkých členov v čitateli *mínus* súčet fázových posunov všetkých členov v menovateli.

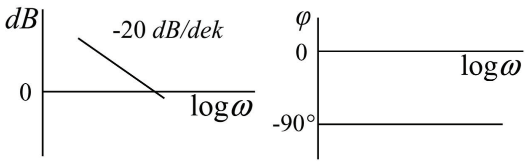
Člen $20\log K$ je zosilnenie nezávisiace na frekvencii, fázový posun je 0.

Člen $(i\omega)$ v čitateli reprezentuje *diferencujúci* člen v dif. rovnici systému - *výstupný signál je daný časovou zmenou vstupného signálu*, jeho veľkosť $\sim 20\log\omega$. V rámci jednej **dekády** $(\omega \div 10\omega)$ sa zmení o $20\log 10\omega - 20\log\omega = ... = 20$, tj. $\underline{20dB/dek}$ (decibely na dekádu), fázový posun je $\varphi = \arctan\frac{\omega}{0} = \arctan\infty = +90$.

Miesto dekád sa niekedy používajú **oktávy** (zdvojnásobenie frekvencie)
$20\log 2\omega - 20\log\omega = 20\log 2 \cong 6$
tj. $6dB/okt$

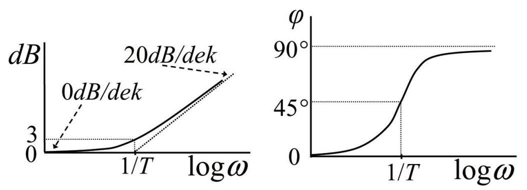


Člen $(i\omega)$ v menovateli reprezentuje *integrujúci* člen v dif. rovnici systému - *vstupný signál je daný časovou zmenou výstupného signálu.* Jeho veľkosť $\sim -20\log\omega$, tj. $-20dB/dek$, fázový posun je $\varphi = \arctan\frac{-\omega}{0} = -\arctan\infty = -90$.



Člen $(1 + i\omega T)$ v čitateli
$20\log|(1 + i\omega T)| = 20\log\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$
$\omega T \ll 1 : 20\log 1 = 0dB$ - asymptota $0dB$
$\omega T \gg 1 : 20\log(\omega T) = 20\log\omega + 20\log T$
- asymptota $20dB/dek$ ($20\log T$ je konšt.)
- priesečník s priamkou $0dB$ pre $\omega = \frac{1}{T}$
$\omega T = 1 : 20\log\sqrt{2} = 3dB$

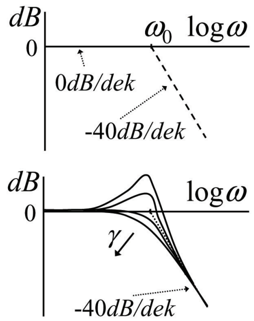
$$\varphi = \arctan\frac{\omega T}{1} = \begin{cases} \to 0, & \omega \to 0 \\ = +45, & \omega = 1/T \\ \to +90, & \omega \to \infty \end{cases}$$



Člen $(1 + i\omega T)$ v menovateli
detto " dolu hlavou".

Kvadratický člen $(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega)$ v menovateli
Ak mu priradíme do čitateľa konštantný člen ω_0^2 (dá sa to urobiť vždy zahrnutím do K), dostávame známy výsledok systému 2. rádu :

$20\log\omega_0^2 - 20\log[\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega] \to 0dB$ pre $\omega \to 0$,
asymptota $20\log\omega_0^2 - 20\log\omega^2 =$ konšt $-40\log\omega$ pre $\omega \to \infty$
so sklonom $\underline{-40dB/dek}$ $(12dB/okt)$,
priesečník asymptoty s $0dB$ pri $20\log\omega_0^2 - 20\log\omega^2 = 0$,
teda pri $\omega = \omega_0$,
skutočná hodnota pri $\omega = \omega_0$ je $-20\log\frac{2\gamma}{\omega_0}$



Kvadratický člen v čitateli - detto " dolu hlavou".

Okrem uvedených členov môže frekvenčná charakteristika obsahovať aj členy $(1 - i\omega T)$ - v menovateli takéto členy znamenajú nestabilitu systému (amplitúda neohraničene rastie).

Výsledná charakteristika systému je zložením charakteristík jednotlivých členov (fázové posuvy aj logaritmy amplitúd sa *sčítavajú*).

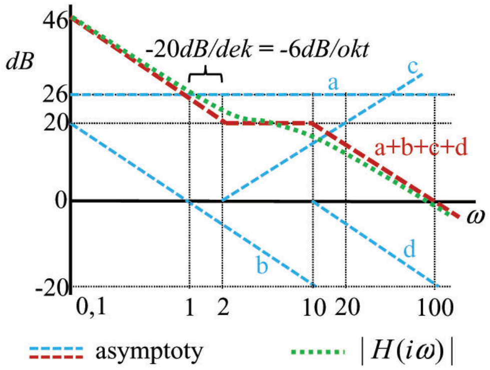
Pr.:
Systém s frekvenčnou charakteristikou $H(i\omega) = \frac{20(1+i0{,}5\omega)}{i\omega(1+i0{,}1\omega)}$

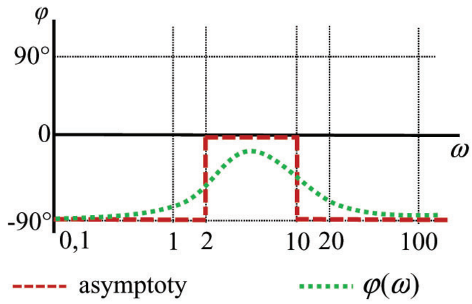
a) konštantný člen $20 : 20\log 20 = 26dB$, $\varphi = 0$ všade

b) integrujúci člen : $0dB$ pre $\omega = 1rad/s$, $\varphi = -90$ všade

c) člen s fázovým predstihom: $\frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5} = 2rad/s$, $\varphi = 0 \to +90$

d) člen s fázovým oneskorením: $\frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}1} = 10rad/s$, $\varphi = 0 \to -90$





C Dielektrická funkcia ako prenosová funkcia

Kramersove-Kronigove vzťahy (KKV) dávajú do súvisu reálnu a imaginárnu časť *prenosových funkcií* fyzikálnych systémov, tj. komplexných funkcií vyjadrujúcich *lineárnu* odozvu systému na vonkajší podnet (signál) *vo frekvenčnej oblasti.* Obe časti komplexnej systémovej prenosovej funkcie majú pritom jasný fyzikálny zmysel - *akumuláciu* a *absorpciu* energie signálu systémom. Priradenie týchto vlastností jednotlivým častiam závisí od konkrétnej situácie, tj. *definovania príčiny a odozvy* (vstupného a výstupného signálu). Napr. v materiálovom vzťahu (pre izotropné stratové materiálové prostredie)

$$D(\omega) = \varepsilon(i\omega)E(\omega)$$

je ako vstupný signál definovaná spektrálna hustota intenzity elektrického poľa $E(\omega)$, ako výstupný signál spektrálna hustota elektrickej indukcie $D(\omega)$. Uvedený vzťah je fourierovskou transformáciou *konvolúcie*

$$D(t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t')E(t-t')dt'$$

čo je vyjadrením (vo všeobecnosti) *nelokálnosti v čase*, čiže *oneskorením* odozvy za príčinou. Prenosovou funkciou systému je dielektrická funkcia (v konvencii E)

$$\varepsilon(i\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon"(\omega) = \varepsilon(\omega) + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega}$$

Reálna časť prenosovej funkcie tu opisuje schopnosť systému akumulovať elektrickú energiu do polarizačného poľa, kým imaginárna časť je mierou vodivostných strát elektrickej energie.

Naproti tomu, v Ohmovom zákone (pre identické prostredie)

$$j(\omega) = \sigma(i\omega)E(\omega)$$

je ako vstupný signál definovaná spektrálna hustota intenzity elektrického poľa $E(\omega)$, ako výstupný signál spektrálna hustota prúdovej hustoty $j(\omega)$, a prenosovou funkciou je komplexná vodivosť

$$\sigma(i\omega) = \sigma'(\omega) + \sigma"(\omega) = \sigma(\omega) + i\omega\varepsilon(\omega) = i\omega\varepsilon(i\omega)$$

kde jednotlivým členom je priradený rovnaky fyzikálny význam, avšak v opačnom poradí. Stojí za povšimnutie, že súčin $\vec{E}\cdot\vec{D}$ je mierou hustoty energie akumulovanej v materiáli (v elektrickom poli), preto funkcia určujúca súvis medzi E a D prednostne (tj. *reálnou* časťou) vyjadruje *akumuláciu* energie. Naproti tomu, vzťah $\vec{E}\cdot\vec{j}$ určuje hustotu vodivostných strát, preto funkcia úmernosti medzi nimi prednostne určuje *straty*.

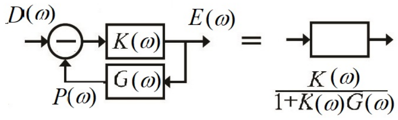
Z fyzikálneho pohľadu môže vyvstať otázka, či $\vec{E}$ nie je skôr odozvou než príčinou pre $\vec{D}$. Platí totiž

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_{ext} \qquad \varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E} = \rho_{celk} \qquad \nabla\cdot\vec{P} = -\rho_{ind}$$

kde ρ_{ext} je hustota náboja *externého* voči prostrediu, teda náboja vyvolávajúceho *vonkajšie* pole. Nahrádza tak obvyklé $\rho_{voľ}$, ktoré je mätúce v prípade kovov, v ktorých *voľné* náboje vstupujú do indukovanej odozvy na vonkajšie pole. V tomto zmysle je $\vec{D}$ vonkajším poľom, vnútornou odozvou materiálu je $\vec{P}$, a celkovou odozvou - výsledným poľom v materiáli je $\vec{E}$. Vzťahom odozva$(\omega) = H(i\omega)\cdot$príčina$(\omega)$ je potom

$$E(\omega) = \frac{1}{\varepsilon(i\omega)}D(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0(1+\chi(i\omega))}D(\omega) = \frac{\frac{1}{\varepsilon_0}}{1+\frac{\varepsilon_0\chi(i\omega)}{\varepsilon_0}}D(\omega)$$

čo je Blackov vzťah pre systém so zápornou spätnou väzbou (kap. 3.2.5),



$$K(s) = \frac{1}{\varepsilon_0} \qquad G(s) = \varepsilon_0\chi(i\omega)$$

(Polarizačné pole pôsobí *proti* polarizujúcemu, výsledné pole v materiáli je menšie než budiace vonkajšie pole.) Takýto pohľad podporuje aj všeobecná téza, že aj pri nulovej príčine môže existovať nenulová odozva systému (napr. plazmové kmity), a to na frekvencii, na ktorej má zovšeobecnená susceptibilita (prenosová charakteristika) *pól* (nulový bod menovateľa). Pri plazmovej frekvencii je $\varepsilon(\omega=\omega_p) = 0$, čo odpovedá pólu funkcie $\frac{1}{\varepsilon}$. Nespochybniteľnou susceptibilitou (vo vzťahu $P-E$) je $\chi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1$, pre ktorú platia KKV.

Z hľadiska experimentu však máme pod kontrolou elektrické pole v materiáli, teda $\vec{E}$, preto sa za nezávislú premennú - "príčinu" považuje spravidla $\vec{E}$.

D Frekvenčné filtre

Frekvenčné filtre sú systémy, ktoré prepúšťajú *len časť spektra* vstupného signálu, zvyšnú časť spektra pohlcujú alebo odrážajú.

Podľa typu prenášaného signálu delíme filtre na **analógové** (spracovávajúce *spojitý* signál) a **digitálne** (spracovávajúce *diskrétny* signál).

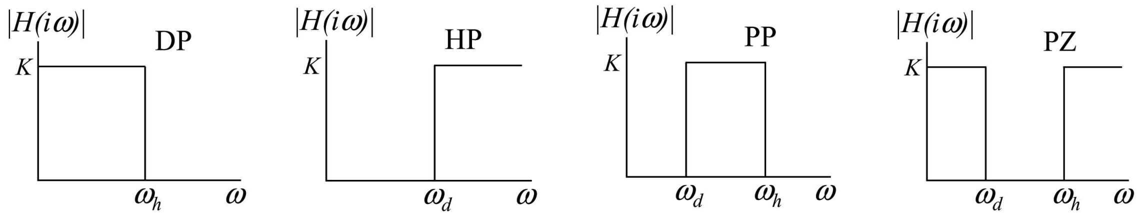
Podľa charakteru spektra prepúšťaného (tj. výstupného signálu) rozoznávame:
nízkofrekvenčný priepust (NP) - prepúšťa len nízke frekvencie
vysokofrekvenčný priepust (VP) - prepúšťa len vysoké frekvencie
pásmový priepust (PP) - prepúšťa len frekvencie z istého intervalu
pásmová zádrž (PZ) - prepúšťa len frekvencie mimo istého intervalu

Pásmové filtre delíme podľa šírky pásma na **úzkopásmové** a **širokopásmové**.

Podľa typu použitých súčiastok delíme filtre na **pasívne** (zložené s pasívnych prvkov R, L, C) a **aktívne** (obsahujúce aktívne prvky - *zosilňovače*).

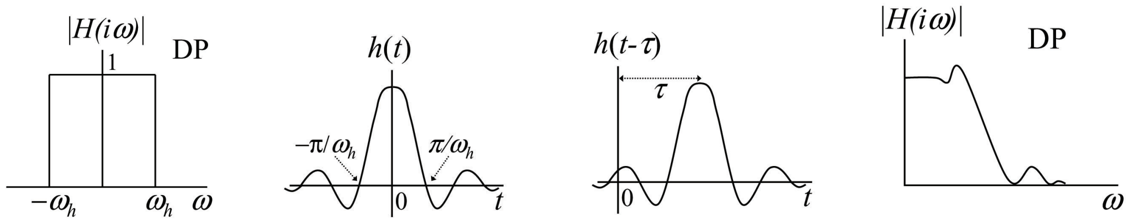
Ideálny a reálny filter

Za *ideálny* považujeme taký filter, ktorého frekvenčná charakteristika je *plochá* (nezávislá na frekvencii) v oblasti prepúšťania, s *ostrou hranou* na hraniciach tejto oblasti.



Nech DP má ideálnu prenosovú charakteristiku (a) $\quad |H(i\omega)| = 1$ pre $-\omega_h < \omega < \omega_h$
$= 0$ inde

Odpovedajúca impulzná charakteristika (FT) je (b) $\quad h(t) = \frac{\omega_h}{\pi}\frac{\sin \omega_h t}{\omega_h t}$
Kauzálnosť reálneho systému však predpokladá $h(t) = 0$ pre $t < 0$ (pri nulovom vstupnom signále pre $t < 0$) - toto možno dosiahnúť *oneskorením* v čase o τ (c), $\quad |H(i\omega)| \to e^{-i\omega\tau}$, pre *konečné* τ však $h(t) \neq 0$ pre $t < 0$ - *nedá sa zostrojiť ideálny filter.*
Prenosové charatkeristiky *reálnych* filtrov nie sú nikdy dokonale ploché a hrany majú vždy *konečnú* strmosť, strmosť možno zvyšovať len za cenu "prekmitov" prenosovej funkcie (d).

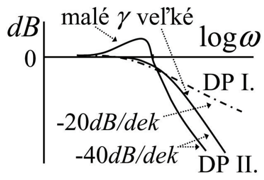


a *b* *c* *d*

Pre praktické účely sa za oblasť *priepustnosti* filtra považuje interval frekvencií s útlmom $< 3dB$, a za oblasť *zádrže* interval s útlmom $> 40dB$ - interval frekvencií medzi týmito oblasťami je *prechodovou* oblasťou.

Pr.:
DP 1. a 2. rádu (podľa stupňa časovej dif. rovnice)
DP 1. rádu: $H(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega/\omega_h}$ útlm -3dB pri ω_h, -20dB/dek pre $\omega > \omega_h$ (a)
(prechodová oblasť zahŕňa 2 dekády - oblasť zádrže nie je dobre definovaná)

DP 2. rádu: $H(i\omega) = \frac{\omega_0^2}{(i\omega)^2+i2\gamma\omega+\omega_0^2}$
$\omega_h \approx \omega_0$ v závislosti od hodnoty γ
Útlm pri ω_h môže byť *nemonotónny* v závislosti od γ
$-40dB/dek$ pre $\omega > \omega_h$



Čím vyšší je rád filtra, tým ostrejšia je prechodová oblasť, tým výraznejšie sú píky v oblasti priepustnosti.

E Dôležité vety z komplexnej analýzy

V tomto dodatku sú uvedené niektoré matematické vety užitočné pri výpočte komplexných charakteristík systémov. Tvrdenia majú inštruktívny charakter, bez nároku na matematickú exaktnosť a všeobecnosť (predpokladáme, že nutné podmienky platnosti uvedených tvrdení sú v rozsahu tu riešených úloh splnené).

Veta 1 - Cauchyho integrálna veta:
Nech C je jednoduchá po častiach hladká uzavretá krivka obopínajúca jednoducho súvislú oblasť v komplexnej rovine, a $f(z)$ je funkcia komplexnej premennej z analytická (holomorfná) v celej tejto oblasti. Potom

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

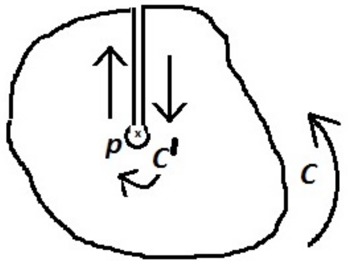
Toto tvrdenie je akceptovateľné intuitívne na základe znalosti výpočtu určitého integrálu funkcie reálnej premennej ako rozdielu hodnôt primitívnej funkcie v hraničných bodoch integrovania.

Veta 2:
Nech C je jednoduchá po častiach hladká uzavretá *kladne orientovaná* (*proti* smeru hodinových ručičiek) krivka obopínajúca jednoducho súvislú oblasť v komplexnej rovine, obsahujúcu bod p. Potom

$$\oint_C \frac{1}{z-p}dz = 2\pi i$$

Cauchyho integrálna veta tu neplatí, lebo funkcia $\frac{1}{z-p}$ nie je definovaná (a teda ani analytická) v bode p - bod p nazývame **pólom** tejto funkcie (funkčná hodnota v jeho okolí rastie nad všetky medze).

Vzorec je založený na tvrdení, že (ľubovoľne zvolenú) krivku C v integráli môžeme nahradiť kružnicou C' o polomere $\varepsilon \to 0$ so stredom v bode p podľa nasledujúcej úvahy:



Uzavretá integračná krivka $C - C'$ na obrázku neobopína bod p, preto podľa Vety 1

$$\oint_{C-C'} \frac{1}{z-p} dz = 0$$

Keďže zvislé úseky krivky $C - C'$ sú navzájom infinitezimálne vzdialené, ich príspevky sa vynulujú, a teda príspevok po kladne orientovanej krivke C musí byť úplne kompenzovaný príspevkom po *záporne orientovanej* (v smere hodinových ručičiek) kružnici C'. Integrál po kladne orientovanej C je teda rovný integrálu po *kladne* orientovanej C'.

Na *kladne* orientovanej kružnici C' je $z = p + \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

$$\oint_{C'} \frac{1}{z-p} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = ... = 2\pi i$$

Veta 3 - Cauchyho integrálny vzorec:
Nech C je jednoduchá po častiach hladká *kladne* orientovaná uzavretá krivka obopínajúca jednoducho súvislú oblasť v komplexnej rovine, a $f(z)$ je funkcia komplexnej premennej z analytická v celej tejto oblasti. Potom

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = f(p)$$

Dôkaz opäť spočíva v náhrade $C \to C'$ infinitezimálne ($\varepsilon \to 0$) obopínajúcej bod p. Potom

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz - f(p) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(z) - f(p)}{z-p} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z) - f(p)) d\vartheta \right| \leq \otimes$$

$$\otimes \leq \underbrace{\max\{|f(z) - f(p)|\}}_{0 \text{ pre } \varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \to 0$$

Veta 4 - Cauchyho veta o reziduách:
Nech C je po častiach hladká uzavretá *kladne* orientovaná krivka obopínajúca jednoducho súvislú oblasť v komplexnej rovine, a $f(z)$ je funkcia komplexnej premennej z analytická v celej tejto oblasti okrem konečného počtu izolovaných singulárnych bodov - pólov) $p_1, ...p_N$. Potom

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k^N M(p_k) \mathrm{Res}\{f(z), p_k\}$$

kde $M(p_k)$ je počet obopnutí pólu p_k krivkou C (+1 pre každé kladne orientované a -1 pre každé záporne orientované obopnutie). Pre jednoduchý, resp n-násobný pól platí

$$\mathrm{Res}\{f(z), p_k\} = \lim_{z \to p_k} (z - p_k) f(z)$$

$$\mathrm{Res}\{f(z), p_k\} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to p_k} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - p_k)^n f(z))$$

Využitie viet pri výpočte FT:
Pri výpočte charakteristík systémov sa stretávame s integrálmi typu

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(spätná FT v konvencii E). Takéto integrály sa ľahko riešia pomocou uvedených viet, pričom integrál z komplexnej funkcie $H(i\omega)$ podľa reálnej premennej ω v intervale $(-\infty,\infty)$

sa doplní o *nulový* príspevok na integrál podľa *komplexnej* frekvencie $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ po *uzavretej krivke v komplexnej rovine.*
Pre $t > 0$ (čo je fyzikálne rozumná požiadavka, keďže predpokladáme $h(t)$ ako odozvu na δ-impulz v čase $t = 0$) je $e^{i\omega t} = e^{i\omega_1 t}e^{-\omega_2 t} \to 0$ pre $\omega_2 \to +\infty$ ($|e^{i\omega_1 t}| = 1$), doplnenie do uzavretej integračnej čiary je teda polkružnica v hornej komplexnej polrovine ($\omega_2 > 0$) s polomerom $\omega \to \infty$. Výsledkom takéhoto integrálu po uzavretej krivke bude súčet reziduí funkcie $H(i\omega)$ pre všetky jej póly ležiace v hornej polrovine.

Pomocou viet z komplexnej analýzy dokážeme splnenie Kramersových-Kronigových vzťahov (KKV) pre systém 1. rádu s prenosovou charakteristikou $H(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega\tau} = \chi(i\omega)$. Zložky zovšeobecnenej susceptibility sú

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} \qquad\qquad \chi''(\omega) = \frac{-i\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}$$

Treba teda dokázať platnosť vzťahov (po dosadení do KKV a úprave)

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' d\omega'}{(\omega' - \frac{i}{\tau})(\omega' + \frac{i}{\tau})(\omega' - \omega)}$$

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{\pi\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega' - \frac{i}{\tau})(\omega' + \frac{i}{\tau})(\omega' - \omega)}$$

V oboch integráloch ide o podintegrálnu funkciu s pólmi $\pm\frac{i}{\tau}$ a ω v komplexnej rovine ω'. Keďže ide o *dostatočne rýchlo* (t.j. rýchlejšie než $\frac{1}{\omega'}$) klesajúcu funkciu pre $\omega' \to \infty$, môžeme tieto integrály cez reálnu os doplniť o *nulový* príspevok po polkružnici o polomere $\omega' \to \infty$ obopínajúcej hornú polrovinu. Aby sme však mohli aplikovať vetu o reziduách, takto vzniknutá uzavretá *kladne* orientovaná integračná dráha *nesmie* prechádzať žiadnym singulárnym bodom. Bod $\omega' = \omega$ na reálnej osi musí teda integračná dráha obísť po infinitezimálnej *pol*kružnici. Pri obídení *zhora* (t.j. vyňatí bodu z uzavretej oblasti) je tento dodatočný integrálny príspevok *polovicou* integrálu po *záporne* orientovanej kružnici *infinitezimálne* obopínajúcej pól, teda $-i\pi\text{Res}\{f(\omega'), \omega\}$. Tento príspevok je treba *odčítať* od integrálu po uzavretej krivke obopínajúcej hornú polrovinu s *jediným* pólom $\frac{i}{\tau}$. Oba integrály v KKV potom prejdú na tvar

$$2\pi i\text{Res}\{f(\omega'), i/\tau\} + i\pi\text{Res}\{f(\omega'), \omega\}$$

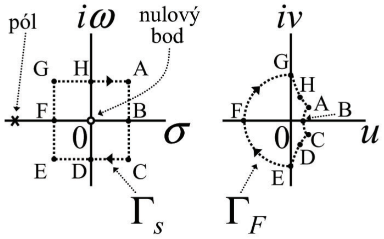
Dosadením príslušnej $f(\omega')$ ľahko overíme platnosť KKV.

F Nyquistovo kritétium stability systémov so spätnou väzbou

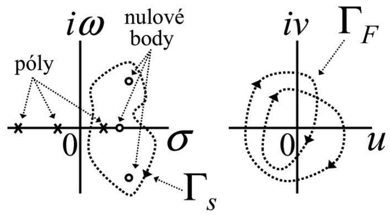
Ak má byť systém so *zápornou* spätnou väzbou stabilný, *reálne* časti *pólov* jeho prenosovej funkcie $K_{sv}(s) = \frac{K(s)}{1+\beta(s)K(s)}$, čiže *koreňov* charakteristickej rovnice $F(s) = 1+\beta(s)K(s) = 0$ musia byť *záporné*. Namiesto (často pracného) počítania *pólov* prenosovej funkcie systému možno použiť techniku *mapovania v komplexnej rovine* - transformovania krivky z s-roviny so súradnicami bodov $[\sigma, i\omega]$, kde $s = \sigma + i\omega$, do $F(s)$-roviny so súradnicami bodov $[u, iv]$, kde $F(s) = u + iv$. *Uzavretá* krivka Γ_s sa pritom vždy transformuje do *uzavretej* krivky Γ_F.

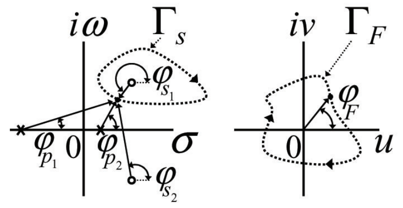
Pr.: Mapovanie jednotkového štvorca v s-rovine do $F(s)$-roviny pre $F(s) = \frac{s}{s+2}$

	A	B	C	D	E	F	G	H
σ	1	1	1	0	-1	-1	-1	0
ω	1	0	-1	-1	-1	0	1	1
u	0,4	0,33	0,4	0,2	0	-1	0	0,2
v	0,2	0	-0,2	-0,4	-1	0	1	0,4



Zdrojom nestability systému sú *korene* funkcie $F(s)$ ležiace v *pravej* polovici komplexnej roviny s. Na vyšetrenie existencie takýchto koreňov možno použiť **Cauchyho teorému** z komplexnej analýzy: Ak uzavretá *záporne* orientovaná krivka Γ_s v s-rovine obopína Z *nulových bodov* a P *pólov* funkcie $F(s)$, pričom neprechádza ani jedným z nich, potom počet *záporne* orientovaných obopnutí *počiatku* $F(s)$-roviny (bodu $[0, i0]$) odpovedajúcou uzavretou krivkou Γ_F v $F(s)$-rovine je $N = Z - P$ (ak $N = Z - P < 0$, potom ide o *kladne* orientované obopnutia).



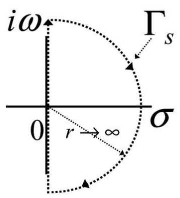


Zmysel tejto teorémy možno vidieť v nasledujúcej úvahe: Komplexnú funkciu $F(s)$ možno faktorizovať do tvaru

$$F(s) = K\frac{\prod_k^m (s - s_k)}{\prod_l^n (s - s_l)} = K\frac{\prod_k^m |s - s_k|}{\prod_l^n |s - s_l|}\left(\sum_k^m \varphi_k - \sum_l^n \varphi_l\right) = |F(s)|\varphi_F$$

Z obrázku je zrejmé, že *celková* zmena uhla φ_i príslušného k nulovému bodu či pólu s_i pozdĺž Γ_s je 0, ak s_i leží *mimo* plochy obopnutej krivkou Γ_s, alebo 2π, ak s_i leží *vnútri* plochy obopnutej krivkou Γ_s. Príspevky nulových bodov, resp. pólov k *celkovej zmene* φ_F sú teda *nenulové* a rovné $\pm 2\pi$ len pre s_i vnútri Γ_s (odpovedajú počtu záporne a kladne orientovaných otáčok φ_F pozdĺž Γ_F). Cieľom je teda:

1) Obopnúť *celú* pravú polovicu s-roviny uzavretou krivkou Γ_s nasledovne:
Priamkou vedenou po imaginárnej osi z bodu $[0, -i\infty]$ do bodu $[0, i\infty]$ a spojením jej "koncových bodov" polkružnicou s polomerom $r \to \infty$.



2) Preniesť túto uzavretú krivku z s-roviny do $F(s)$-roviny.
3) Spočítať počet *záporne* orientovaných obopnutí bodu $[0, i0]$ v $F(s)$-rovine N.

Počet nulových bodov v pravej časti s-roviny je potom

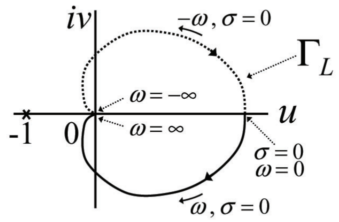
$\underline{Z = N + P}$ (obvykle $P = 0$, potom $Z = N$)

Alternatívne možno definovať komplexnú funkciu $L(s) = F(s) - 1 = \beta(s)K(s)$ (táto je spravidla známa a *fakrorizovaná*, na rozdiel od $F(s)$) - mapovanie potom prebieha v $L(s)$-rovine a počíta sa počet *záporne* orientovaných obopnutí bodu $[-1, i0]$ krivkou Γ_L v $L(s)$-rovine.

Na základe uvedeného možno formulovať **Nyquistovo kritérium**:
Systém so spätnou väzbou je *stabilný vtedy a len vtedy* ak uzavretá krivka Γ_L (podľa vyššie uvedeného popisu) *neobopína* bod $[-1, i0]$ v $L(s)$-rovine pri *nulovom* počte pólov funkcie $L(s)$ na pravej strane s-roviny, alebo ak počet *kladne* orientovaných obopnutí bodu $[-1, i0]$ krivkou Γ_L je *rovný počtu pólov* funkcie $L(s)$ na *pravej* strane s-roviny ($Z = 0$, $N = -P$).

- Pr.: $L(s) = \beta(s)K(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$ $(a, b > 0$ reálne)

- 2 *záporné* reálne póly

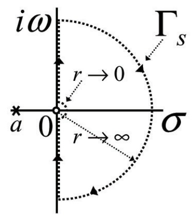


Plná časť Γ_L reprezentuje časť Γ_s na kladnej imaginárnej osi, a bodkovaná časť Γ_L časť Γ_s na zápornej imaginárnej osi. Polkruh $r \to \infty$ na Γ_s je vpísaný do bodu [0,0] L_s-roviny.

Krivka Γ_L *neobopína* bod [-1,0] L_s-roviny - systém je *stabilný*.

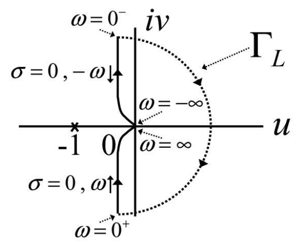
- Pr.: $L(s) = \frac{K}{s(s+b)}$ $(a > 0$ reálne)

- 1 *záporný* reálny pól a 1 reálny pól v *počiatku*



Krivka Γ_s *nesmie* prechádzať nulovým bodom ani pólom, musí preto *infinitezimálne míňať počiatok* sprava (polkruh o polomere $r \to 0$).

Spodná, resp. horná plná časť Γ_L reprezentuje Γ_s na kladnej, resp. zápornej imaginárnej osi, polkruh $r \to \infty$ na Γ_s je vpísaný do bodu [0,0] L_s-roviny, a bodkovaná časť Γ_L je obrazom časti Γ_s obchádzajúcej v infinitezimálnej vzdialenosti počiatok s-roviny.



Krivka Γ_L *neobopína* bod [-1,0] L_s-roviny - systém je *stabilný*.

G Impedancia v kontexte Kramersových-Kronigových vzťahov

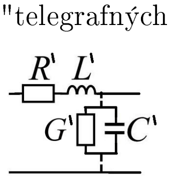
Impedancia systému je definovaná vzťahom

$$U(\omega) = Z(i\omega)I(\omega)$$

Vstupnou, resp. výstupnou, veličinou sú tu prúd, resp. napätie. Súčin UI je mierou jouleovských strát, reálna časť $Z(i\omega)$ bude teda charakterizovať straty elektrickej energie v systéme, kým imaginárna časť akumulačnú schopnosť systému.

V prípade obvodov so *sústredenými* parametrami je takáto fyzikálna interpretácia zrejmá. Napr. pre sériový RL dvojpól je impedancia $R + i\omega L$. R je mierou strát, tj. *nevratného* transféru energie zo zdroja do systému (záťaže), kým ωL je mierou *vratného* cyklického transféru energie zo zdroja do akumulačného prvku (L) a naspäť do zdroja.

Problém s interpretáciou pojmu impedancia môže vzniknúť pri charakterizovaní systémov s *rozloženými* parametrami (keď rozmery systému nie sú zanedbateľné voči vlnovým dĺžkam signálov). Napr. pre dlhé vedenie (dvojlinku), modelované kombináciou parametrov R', L', C', G' na jedn. dĺžky je **charakretistická (vlnová) impedancia** vedenia (riešením "telegrafných" rovníc) daná vzťahom



$$Z_v = \sqrt{\frac{R' + i\omega L'}{G' + i\omega C'}}$$

V limite zanedbateľných strát $R', G' \to 0$, ako aj v limite dominantných strát $R' \gg \omega L'$,

$G' \gg \omega C'$ je Z_v *reálne*! Impedancia na vstupných svorkách dlhého vedenia dĺžky l však nezávisí len od Z_v, ale aj od impedancie ukončenia dlhého vedenia Z_L, a to podľa vzťahu

$$Z(l) = Z_v \frac{Z_L + Z_v \tanh \gamma l}{Z_v + Z_L \tanh \gamma l} \qquad\qquad \gamma = \sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')}$$

Jedine v prípade dlhého vedenia ukončeného *prispôsobenou* záťažou, keď na konci vedenia *nedochádza k odrazu* energie a teda energia sa vedením šíri *len v smere od zdroja k záťaži*, je vstupnou impedanciou celého systému $Z = Z_v$.

Charakteristická (vlnová) impedancia dlhého vedenia (resp. prostredia, niekedy používame pojem *povrchová impedancia*) teda vo všeobecnosti *nie je* impedanciou v zmysle KKV! Je ňou len v prípade "nekonečne" dlhého vedenia, resp. vedenia ukončeného prispôsobenou záťažou. Analyzujme impedanciu Z na vstupných svorkách takéhoto (bezodrazového) vedenia:

• V limite $R' \gg \omega L'$, $G' \gg \omega C'$ je $Z = Z_v$ *reálne*. Všetká energia dodaná zdrojom sa *nevratne absorbuje* v systéme (premení na tepelnú energiu), v súlade s uvedenou fyzikálnou interpretáciou.
• V limite $R', G' \to 0$ je Z opäť *reálne*, avšak ku žiadnej dissipácii energie nedochádza (zanedbávame ju). Celá energia sa teda bez pohltenia *nevratne šíri od zdroja.*
• V prípade $\frac{R'}{G'} = \frac{L'}{C'}$ je Z opäť *reálne*, energia sa *šíri od zdroja, pričom sa postupne čiastočne pohlcuje.*

Reálnosť vstupnej impedancie dlhého vedenia teda znamená *nevratný transfér energie zo zdroja do systému, bez ohľadu* na to, či energia vo vedení dissipuje alebo sa jednosmerne šíri ďalej. "Z pohľadu" zdroja systém celú energiu "pohltí".
• Mimo týchto limitných prípadov je $Z = Z_v$ komplexné. Na prispôsobenom ukončení síce nedochádza k odrazu, ale komplexná vstupná impedancia celého systému ("z pohľadu" zdroja energie) znamená, že nie celá energia dodávaná zdrojom vnikne *do systému.* Ak výstupná (vnútorná) impedancia zdroja Z_i je *čisto reálna*, systém (tj. dlhé vedenie s komplexnou Z_v a so zakončením bezordazovo prispôsobeným k samotnému vedeniu) *nie je impedančne prispôsobený ku zdroju.* Časť energie sa teda od systému "odrazí" už na jeho "vstupe" (presnejšie vratne sa akumuluje vo vedení) - túto vratnú časť energetického transféru reprezentuje imaginárna časť Z.
• V prípade *komplexného* $Z = Z_v$ impedančne prispôsobeného ku komplexnej výstupnej impedancii zdroja, $Z = Z_i^*$, nedochádza k odrazu energie ani na vstupe do systému, a *celá energia sa nevratne šíri a pohlcuje* smerom od zdroja.

Stotožnenie reálnej a imaginárnej časti vstupnej impedancie systému s nevratnou, resp. vratnou časťou energetického transféru v systéme v zmysle KKV sa vzťahuje teda na prípad *zdroja energie s reálnou výstupnou impedanciou.*

H Prevodová tabuľka medzi maticami prenosových systémov

	(Z)	(Y)	(h)	(A)
Z_{11}		Y_{22}/D_Y	D_h/h_{22}	A_{11}/A_{21}
Z_{12}		$-Y_{12}/D_Y$	h_{12}/h_{22}	D_A/A_{21}
Z_{21}		$-Y_{21}/D_Y$	$-h_{21}/h_{22}$	$1/A_{21}$
Z_{22}		Y_{11}/D_Y	$1/h_{22}$	A_{22}/A_{21}
D_Z		$1/D_Y$	h_{11}/h_{22}	A_{12}/A_{21}
Y_{11}	Z_{22}/D_Z		$1/h_{11}$	A_{22}/A_{12}
Y_{12}	$-Z_{12}/D_Z$		$-h_{12}/h_{11}$	$-D_A/A_{12}$
Y_{21}	Z_{21}/D_Z		h_{21}/h_{11}	$-1/A_{12}$
Y_{22}	Z_{11}/D_Z		D_h/h_{11}	A_{11}/A_{12}
D_Y	$1/D_Z$		h_{22}/h_{11}	A_{21}/A_{12}
h_{11}	D_Z/Z_{22}	$1/Y_{11}$		A_{12}/A_{22}
h_{12}	Z_{12}/Z_{22}	$-Y_{12}/Y_{11}$		D_A/A_{22}
h_{21}	$-Z_{21}/Z_{22}$	Y_{21}/Y_{11}		$-1/A_{22}$
h_{22}	$1/Z_{22}$	D_Y/Y_{11}		A_{21}/A_{22}
D_h	Z_{11}/Z_{22}	Y_{22}/Y_{11}		A_{11}/A_{22}
A_{11}	Z_{11}/Z_{21}	$-Y_{22}/Y_{21}$	$-D_h/h_{21}$	
A_{12}	D_Z/Z_{21}	$-1/Y_{21}$	$-h_{11}/h_{21}$	
A_{21}	$1/Z_{21}$	$-D_Y/Y_{21}$	$-h_{22}/h_{21}$	
A_{22}	Z_{22}/Z_{21}	$-Y_{11}/Y_{21}$	$-1/h_{21}$	
D_A	Z_{12}/Z_{21}	Y_{12}/Y_{21}	$-h_{12}/h_{21}$	

Platí pre:

$(Z)(Y)(h):\quad I_1 \rightarrow$
$\qquad\qquad\qquad I_2 \leftarrow$

$(A):\quad I_1 \rightarrow$
$\qquad\quad I_2 \rightarrow$

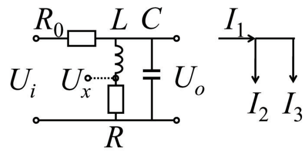
$D_A = 1$

(dôkaz pomocou prvkov admitančnej matice z prevodovej tabuľky)

I Úlohy

Ukážková úloha

Vyšetrite vlastnosti obvodu na obrázku ($U_o(t)$ pri danom $U_i(t)$, impulzná, prechodová, frekvenčná charakteristika)



• Na úvod je vhodné (ak je to možné) pomocou fyzikálnych argumentov odhadnúť správanie systému (počas výpočtov potom môžeme kontrolovať, či sa "uberáme správnym smerom").

Pre *rýchle* deje predstavuje indukčnosť nekonečnú impedanciu a kapacita naopak skrat - výstupné napätie teda klesá k nule.
Pre *pomalé* deje je kondenzátor v ustálenom nabitom stave (prúd netečie - nekonečná impedancia) a indukčnosť sa neprejavuje (skrat) - systém sa chová ako napätový delič s koeficientom prenosu $R/(R+R_0) < 1$.
Pre nie príliš veľké tlmenie má obvod rezonančný charakter pri frekvenciách niekde okolo $\sim 1/\sqrt{LC}$.
Systém teda prepúšťa nízkofrekvenčné signály s prenosom $\approx R/(R+R_0) < 1$, v okolí rezonancie pri malom tlmení má prenos > 1 , vysoké frekvencie neprepúšťa - prudké zmeny vstupného napätia budú na výstupe "vyhladené".

• *Všeobecná analýza v časovej oblasti*
a) Zostavenie časovej dif. rovnice

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad I_1 = \frac{U_i - U_o}{R_0} \qquad I_2 = \frac{1}{L}\int (U_o - U_x)dt = \frac{U_x}{R} \qquad I_3 = C\frac{dU_o}{dt}$$

Z $I_2 = I_1 - I_3$ vyjadríme U_x a spätne dosadíme do integrálneho výrazu pre I_2 v rovnici zachovania prúdu, a po následnom zderivovaní dostávame

$$\frac{d^2U_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_0C} + \frac{R}{L}\right)\frac{dU_o}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\frac{1}{LC}U_o = \frac{1}{R_0C}\frac{dU_i}{dt} + \frac{R}{R_0}\frac{1}{LC}U_i$$

(R_0C a L/R majú rozmer času, $1/LC$ je čas^{-2}, R/R_0 bezrozmerné - rozmerová analýza je v poriadku.)

Zavedením formálneho operátora derivovania D dostávame

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{1}{R_0C}D + \frac{R}{R_0LC}}{D^2 + \left(\frac{1}{R_0C} + \frac{R}{L}\right)D + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\frac{1}{LC}} = \underline{\frac{b_1D + b_0}{D^2 + 2\gamma D + \omega_0^2}}$$

kde

$$2\gamma = \left(\frac{1}{R_0C} + \frac{R}{L}\right) \qquad \omega_0^2 = \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\frac{1}{LC} \qquad b_0 = \frac{R}{R_0LC} \qquad b_1 = \frac{1}{R_0C}$$

b) Všeobecné prechodové riešenia

Ide o riešenia homogénnej rovnice (bez pravej strany) - hľadajú sa korene menovateľa

$$D^2 + 2\gamma D + \omega_0^2 = 0$$

Prechodové riešenia sú v tvare

$$\underline{U_o(t) = A_{1,2}e^{\lambda_{1,2}t}} \qquad \underline{\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

Koeficienty $A_{1,2}$ sú dané počiatočnými podmienkami (hodnoty U_i a U_o, resp. ich derivácií v čase 0)

Monotónne tlmeným priebehom odpovedá $\gamma > \omega_0$.
Fyzikálna interpretácia: L/R a R_0C sú časové konštanty RL a R_0C členov (charakterizujú dobu ustálenia - prechodového javu), a $1/\omega_0$ odpovedá perióde vlastných kmitov oscilátora - podmienka $\gamma > \omega_0$ teda znamená, že tlmenie je monotónne vtedy, ak *kratší* z časov L/R a R_0C je menší než polovica periódy kmitov (doba tlmenia je kratšia než doba kmitu).

Nerovnosť $\gamma < \omega_0$ naopak znamená tlmené *oscilácie*.
Prípadom kritického tlmenia ($\gamma = \omega_0$ - dvojnásobný reálny koreň) sa nebudeme zaoberať.

c) Všeobecné stacionárne riešenie

$$\underline{U_o(t) = c_{1,2} \int_0^t e^{\lambda_{1,2}(t-\tau)} U_i(\tau) d\tau}$$

Výpočet $c_{1,2}$:

$$\frac{b_1 D + b_0}{D^2 + 2\gamma D + \omega_0^2} = b_1 \frac{D + \frac{b_0}{b_1}}{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)} = \frac{c_1}{D-\lambda_1} + \frac{c_2}{D-\lambda_2}$$

Po vynásobení $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$: $\qquad b_1\left(D + \frac{b_0}{b_1}\right) = c_1(D-\lambda_1) + c_2(D-\lambda_2)$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pre } D = \lambda_1 : & b_1\left(\lambda_1 + \frac{b_0}{b_1}\right) = c_1(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \text{pre } D = \lambda_2 : & b_1\left(\lambda_2 + \frac{b_0}{b_1}\right) = c_2(\lambda_2 - \lambda_1) \end{array}\right\} \qquad \underline{c_{1,2} = b_1 \frac{\lambda_{1,2} + \frac{b_0}{b_1}}{\lambda_{1,2} - \lambda_{2,1}}}$$

d) Úplné všeobecné riešenie - superpozícia *b)* a *c)*

• *Impulzná charakteristika v časovej oblasti*
Odozva na impulz $U_i(t) = U \cdot \delta(t)$ je

$$\underline{U_o = Uh(t) = c_1 U e^{\lambda_1 t} + c_2 U e^{\lambda_2 t}}$$

(pre $x(t) = \delta(t)$ je $c_{1,2} \int_0^t e^{\lambda_{1,2}(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau = c_{1,2} e^{\lambda_{1,2} t}$).
Pre reálne $\lambda_{1,2}$ sú aj $c_{1,2}$ reálne - odozva má monotónny charakter.
Pre komplexné $\lambda_{1,2}$ sú však aj $c_{1,2}$ komplexné - oscilačný charakter odozvy je sprevádzaný dodatočným časovým posunom (matematické vyjadrenie *reálneho* výstupného napätia si vyžaduje ďalšie matematické úpravy komplexného výrazu - nevýhoda tohto postupu).

• *Prechodová charakteristika v časovej oblasti*
Odozva na napäťový skok: $\quad U_i(t) = U \cdot u(t) = U \quad$ pre $t > 0 \quad$ (inak 0).
S použitím konvolučného (Duhamelovho) integrálu

$$U_o = U \int_0^t u(t-\tau) h(\tau) d\tau = U \left\{ \frac{c_1}{\lambda_1} \left[e^{\lambda_1 \tau} \right]_0^t + \frac{c_2}{\lambda_2} \left[e^{\lambda_2 \tau} \right]_0^t \right\} =$$

$$\underline{= U \left\{ \frac{c_1}{\lambda_1} \left[e^{\lambda_1 t} - 1 \right] + \frac{c_2}{\lambda_2} \left[e^{\lambda_2 t} - 1 \right] \right\}}$$

Pre reálne (záporné) $\lambda_{1,2}$ monotónny nábeh na $U\left\{\frac{c_1}{|\lambda_1|} + \frac{c_2}{|\lambda_2|}\right\}$. Pre komplexne združené $\lambda_{1,2}$ oscilačný nábeh + fázový posun.

• *Všeobecná analýza vo frekvenčnej oblasti*
a) Prenosová charakteristika

Prechodom do frekvenčnej oblasti riešime odozvu systému na vstupný signál *pre ľubovoľnú danú zložku* ω z frekvenčného spektra signálu - ide teda o riešenie odozvy systému na *harmonické* budenie.
Pre *harmonické* signály je operátor derivovania v časovej dif. rovnici D nahradený výrazom $i\omega$.
V tomto príklade sa však núka využiť priamočiarejší postup než zostavovanie dif. rovnice - skladanie *harmonických* impedancií

$$Z_1 = R_0 \qquad\qquad Z_2 = (R + i\omega L) \parallel \frac{1}{i\omega C} \qquad\qquad \text{(v konvencii E)}$$

pričom systém je *napäťovým deličom* s prenosom napätia

$$\underline{\frac{U_o(\omega)}{U_i(\omega)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{i\omega \cdot b_1 + b_0}{-\omega^2 + i\omega \cdot 2\gamma + \omega_0^2} = H(i\omega)}$$

Je to pomer medzi ω-zložkami vo fourierovskom obraze výstupného a vstupného signálu pre *každé* ω - dá sa teda použiť pre *ľubovoľný* (aj neharmonický) signál interagujúci s *lineárnym* systémom.

(Skladanie komplexných impedancií je zjavne rýchlejší a jednoduchší spôsob určenia prenosovej charakteristiky než zostavovanie časovej dif. rovnice.)

b) *Bodeho grafy*

Na frekvenčnú analýzu prenosu pomocou Bodeho grafov je vhodné vyjadrit prenosovú charakteristiku v tvare

$$H(i\omega) = b_0 \frac{1 + i\omega T}{-\omega^2 + i\omega \cdot 2\gamma + \omega_0^2} = \frac{b_0}{\lambda_1\lambda_2} \frac{1 + i\omega T}{\left(1 + \frac{i\omega}{|\lambda_1|}\right)\left(1 + \frac{i\omega}{|\lambda_2|}\right)}$$

kde $T = \frac{b_1}{b_0} = \frac{L}{R}$ (rozklad kvadratickej formy v menovateli na koreňové činitele je možný pre reálne $\lambda_{1,2}$).

Konštantný člen $\frac{b_0}{\lambda_1\lambda_2}$ spôsobuje frekvenčne nezávislý prenos, ktorý je $\frac{R}{R_0+R}$ (prejaví sa pri $\omega \to 0$).

Výraz $(1 + i\omega T)$ v čitateli spôsobuje monotónny nárast amplitúdovej prenosovej charakteristiky z $0dB$ pre $\omega \to 0$ s asymptotou $+20dB/dek$ s priesečníkom osi ω pri $\omega = 1/T$, a monotónny nárast fázovej prenosovej charakteristiky z 0 pre $\omega \to 0$ na 90° pre $\omega \to \infty$ ($\varphi = 45$ pri $\omega = 1/T$).

Výrazy $(1 + i\omega\alpha)$ v menovateli s reálnymi koreňmi, $\alpha = 1/|\lambda_{1,2}|$, spôsobujú monotónny pokles amplitúdovej charakteristiky z $0dB$ pre $\omega \to 0$ s asymptotou $-20dB/dek$ s priesečníkom osi ω pri $\omega = 1/\alpha$, a monotónny pokles fázovej charakteristiky z 0 pre $\omega \to 0$ na -90° pre $\omega \to \infty$ ($\varphi = -45$ pri $\omega = 1/\alpha$).

Kvadratický člen v menovateli s komplexnými koreňmi spôsobuje v prípade malého tlmenia nemonotónnosť amplitúdovej charakteristiky - rezonančný nárast pri ω_0 a pokles s asymptotou $-40dB/dek$ pri vysokých ω, a monotónny pokles fázovej charakteristiky z 0 na -180°.

Výsledný priebeh je prenosovej charakteristiky je superpozíciou týchto čiastkových prenosov.

• *Impulzná charakteristika vo frekvenčnej oblasti*

Prenosová charakteristika $H(i\omega)$ je priamo fourierovským obrazom impulznej charakteristiky, odozva na vstupný signál $U_i(t) = U\delta(t)$ má teda fourierovský obraz ($U\delta(t) \to U$)

$$\underline{U_o(\omega) = UH(i\omega)}$$

Spätnou FT dostávame impulznú odozvu v časovej oblasti - k tomu je vhodné vyjadriť si $H(i\omega)$ pomocou parciálnych zlomkov

$$H(i\omega) = \frac{c_1}{i\omega - \lambda_1} + \frac{c_2}{i\omega - \lambda_2}$$

kde $\lambda_{1,2}$ a $c_{1,2}$ sa počítajú rovnako ako v časovej oblasti.
Časovú závislosť impulznej odozvy pre *reálne záporné* $\lambda_{1,2}$ dostávame spätnou FT výrazov $\frac{1}{i\omega-\lambda_{1,2}}$, kvôli formálnej obtiaži s *komplexnými* $\lambda_{1,2}$ je však výhodnejšie namiesto FT použiť metódu LT, pri ktorej netreba pri transformačných vzťahoch rozlišovať medzi reálnymi a komplexnými $\lambda_{1,2}$.

V laplaceovskom formalizme ($i\omega \to s$) je prenosová funkcia nášho systému

$$K(s) = \frac{sb_1 + b_0}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2}$$

(namiesto $\lambda_{1,2}$ používame označenie $s_{1,2}$, aby sme zdôraznili principiálnu komplexnosť koreňov, výpočet je však rovnaký).
Spätnou LT potom dostávame

$$\underline{U_o(t) = c_1 U e^{s_1 t} + c_2 U e^{s_2 t}}$$

Výraz je však transparentný len pre *reálne záporné* $s_{1,2}$ - opäť narážame na problém s komplexnými koeficientami $c_{1,2}$ pre komplexné $s_{1,2}$, preto je pre komplexné $s_{1,2}$ výhodnejšie transformovať (po istých úpravách) výraz s kvadratickou formou v menovateli: Rozšírenie čitateľa i menovateľa o 0 vedie na

$$\frac{sb_1 + b_0 \ \ (+b_1\gamma - b_1\gamma)}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2 \ \ (+\gamma^2 - \gamma^2)} = ... = b_1 \underbrace{\frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2 + \omega_\gamma^2}} + \frac{b_0 - b_1\gamma}{\omega_\gamma} \underbrace{\frac{\omega_\gamma}{(s+\gamma)^2 + \omega_\gamma^2}}$$

kde $\omega_\gamma^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ (čo je frekvencia *tlmených* kmitov harmonického oscilátora), a kde spoznáme výrazy známe z tabuľky LT

$$\underline{U_o(t) = Ub_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_\gamma t + U \frac{b_0 - b_1\gamma}{\omega_\gamma} \ e^{-\gamma t} \sin \omega_\gamma t}$$

Na výstupe systému dostávame postupne zanikajúce oscilácie

• *Prechodová charakteristika vo frekvenčnej oblasti*
Pri LT $U_i(t) = U \cdot u(t) \to U_i(s) = \frac{U}{s}$, a teda

$$U_0(s) = K(s) U_i(s) = U \frac{sb_1 + b_0}{s(s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2)}$$

Pre reálne (záporné) $s_{1,2}$ je vhodné výraz upraviť do tvaru

$$U_0(s) = U \frac{sb_1 + b_0}{s(s - s_1)(s - s_2)} = U \left[\frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} \right]$$

kde po vynásobení $s(s - s_1)(s - s_2)$ a postupnom dosadení s, s_1, s_2 za s dostávame

$$c_0 = \frac{b_0}{s_1 s_2} \qquad c_1 = \frac{s_1 b_1 + b_0}{s_1(s_1 - s_2)} \qquad c_2 = \frac{s_2 b_1 + b_0}{s_2(s_2 - s_1)}$$

a teda

$$\underline{U_o(t) = U \left[c_0 + c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \right]}$$

Pre komplexné $s_{1,2}$ je výhodnejšie počítať výraz

$$\frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} = \frac{c}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

odkiaľ po úpravách a s využitím vzťahov $s_1 s_2 = \omega_0^2$, $s_1 + s_2 = -2\gamma$ (je treba sa zbaviť výrazov s_1, s_2, lebo sú komplexné) dostávame

$$c = \underbrace{b_1 - \frac{2\gamma b_0}{\omega_0^2}} - \underbrace{\frac{b_0}{\omega_0^2}}\, s = c' - c'' s \qquad\qquad c' = b_1 - \frac{2\gamma b_0}{\omega_0^2} \qquad\qquad c'' = \frac{b_0}{\omega_0^2}$$

Platí teda

$$U_o(s) = U\left[\frac{c_0}{s} + \frac{c' - c'' s}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2}\right] = \ldots = U\left[\frac{c_0}{s} - c'' \frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2 + \omega_\gamma^2} + \frac{c' + c''\gamma}{\omega_\gamma} \frac{\omega_\gamma}{(s+\gamma)^2 + \omega_\gamma^2}\right]$$

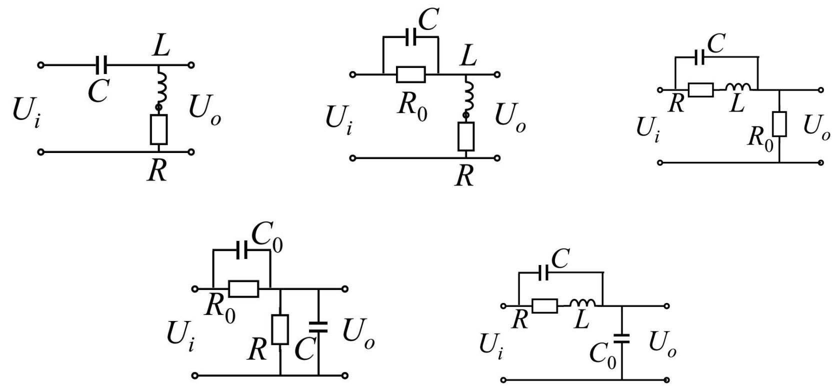
a teda

$$\underline{U_o(t) = c_0 U - U e^{-\gamma t}\left[c'' \cos\omega_\gamma t - \frac{c' + c''\gamma}{\omega_\gamma} \sin\omega_\gamma t\right]}$$

Po odoznení prechodového javu (tlmené kmity) sa výstupné napätie ustáli na hodnote $c_0 U = \ldots = U\frac{R}{R_0+R}$, čo je očakávaný výsledok.

Úlohy na domáce cvičenie

• Vykonajte obdobnú analýzu uvedených systémov



• Určite predmety k Laplaceovým obrazom výrazov

$\frac{s^2+1}{s(s+1)(s+2)}$	$[\ \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}\ ]$
$\frac{s+2}{s^5+4s^4+6s^3+4s^2+s}$	$[\ 2 - (2 + 2t + t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}\ ]$
$\frac{s}{(s-1)(s-2)^2}$	$[\ e^t + (2t-1)e^{2t}\ ]$
$\frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$	$[\ \frac{1}{5}(\cos 2t + 2\sin 2t - e^{-t})\ ]$
$\frac{4}{s(s+2)^2}$	$[\ 1 - (2t+1)e^{-2t}\ ]$
$\frac{1}{s^3(s+2)^2}$	$[\ \frac{3}{16} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} - \frac{3}{16}e^{-2t} - \frac{t}{8}e^{-2t}\ ]$
$\frac{ab}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$, $a \neq b$	$[\ \frac{b\sin at - a\sin bt}{b^2-a^2}\ ]$

• Pomocou LT nájdite riešenia dif. rovníc

$y'' + 4y' + 13y = 0$ poč. podm.: $y'(0) = 3,\ y(0) = 0$

[$y(t) = e^{-2t}\sin 3t$]

$y^{(4)} - y = 0$ poč. podm.: $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y^{(3)}(0) = 1$

[$y(t) = \frac{1}{2}\{\sinh t - \sin t\}$]

$y^{(3)} + y = 0$ poč. podm.: $y(0) = 1\ , y'(0) = y''(0) = 0$

[$y(t) = \frac{1}{3}\{e^{-t} + 2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\}$]

$y'' + a^2 y = \sin\omega t\ , a \neq 0$ poč. podm.: $y(0) = 1\ , y'(0) = 0$

[$y(t) = \frac{1}{\omega^2 - a^2}\left(\frac{\omega}{a}\sin at - \sin\omega t\right) + \cos at\ ,\ a^2 \neq \omega^2$
$y(t) = \frac{1}{2\omega^2}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right) + \cos\omega t\ ,\ a^2 = \omega^2$]

$y'(t) + 5y(t) + 6\int_0^t y(\tau)d\tau = 0$ poč. podm.: $y(0) = 1$

[$y(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}$]

$y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)d\tau = 0$ poč. podm.: $y(0) = 1$

[$y(t) = e^{-3t} - 3te^{-3t}$]

Michal Maheľ
ANALÓGOVÉ ELEKTRONICKÉ SYSTÉMY

Vydavateľ:
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Knižničné a edičné centrum
Bratislava 2022
1. vydanie

ISBN:
978-80-8147-117-9