# Je aj obrázok argumentom?

Mária Slavíčková[1]

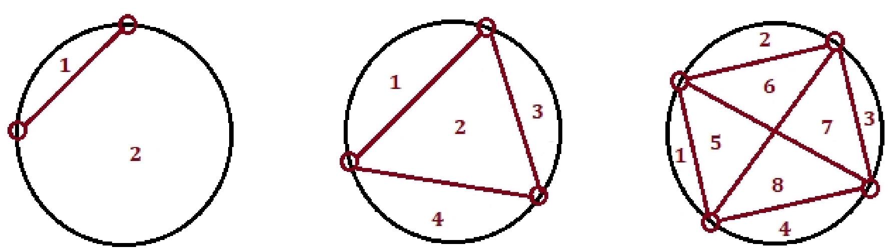
*V príspevku sa zameriavame na grafickú reprezentáciu argumentu a ako nám v niektorých momentoch vhodný obrázok vie výrazne uľahčiť nielen riešenie, ale aj odôvodnenie odpovede.*

## Úvod

Matematika je charakterizovaná ako veda, kde vieme všetko racionálne odôvodniť, vyargumentovať. V jej vyučovaní by sme mali podľa Štátneho vzdelávacieho programu (ŠPÚ, 2014) na túto špecifickosť prihliadať a viesť našich žiakov k argumentácii a podporovať ich schopnosť odôvodniť či už postup riešenia, korektnosť/nekorektnosť výsledku a pod. Ako uvádza Kilpatrick (2011), argumentácia je jednou z neoddeliteľných súčastí matematickej zručnosti. Preto je dôležité sa jej venovať a rozvíjať už od prvého stupňa ZŠ.

Argument je podľa Toulmina (2003) definovaný ako nástroj vďaka ktorému z počiatočných dát využitím legitímnych krokov prichádzame k tvrdeniu. Za legitímne kroky možno považovať:

- Opretie sa axiómy, alebo skôr dokázané a známe tvrdenia (napr. súčet dvoch párnych čísel je párny).
- Identifikácia množiny, pre ktorú tvrdenie platí (napr.: Na obvode kruhu si zvolíme niekoľko bodov. Každý bod spojíme s každým úsečkou. Na koľko oblastí nám tieto úsečka rozdelia daný kruh?).




**Obrázok 1:** Vizualizácia úlohy o počte oblastí kruhu podľa zadania.

- Identifikácia prvkov, ktoré tvrdenie popierajú (napr. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 41$ je prvočíslo).

[1]Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave; slavickova@fmph.uniba.sk

Keď sa povie argumentácia a jej miesto v školskej matematiky, na základe výsledkov z prieskumu (Jánošková a kol., 2022, tento zborník) sa stretneme s odpoveďami ako „Tabuľka. Tých logických spojok. To mne vždy hneď prvé napadne keď to počujem“, „[...] u mňa to bude mať dôležitú váhu, to zdôvodňovanie a argumentácia [...]“, „[...] tú logiku rozvíjame hocijakými slovnými úlohami, v hociktorej téme z matematiky“. To nie je zrovna lichotivé, najmä ak títo študenti majú ísť o 3 semestre do školskej praxe.

Prečo by sme na hodinách matematiky mali argumentovať? Dôvodov je viacero a argumentovať by sme nemali len my, učitelia, ale aj naši žiaci. Argument má viaceré vlastnosti a funkcie (Stylianov & Blanton, 2018):

- ukázať fungovanie pravidla (prečo pravidlo funguje?);
- overenie platnosti pravidla/tvrdenia;
- systematizáciou argumentov sa vieme dopracovať k dôkazu.

V závislosti od stupňa možno použiť viaceré formu argumentu, my zvykneme často siahať rovno po symbolických, no nejde o jedinú validnú formu. Okrem symbolickej reprezentácie možno použiť aj obrázkovú (grafickú), fyzické objekty, slová a slovné opisy, digitálne nástroje (napr. GeoGebra), resp. ich ľubovoľnú kombináciu.

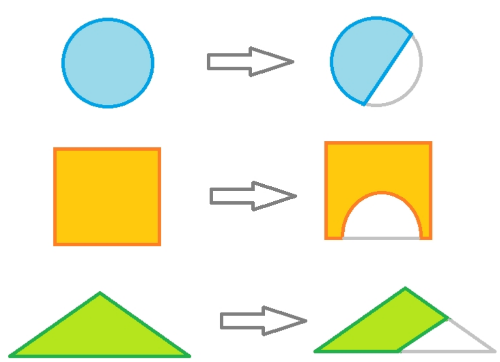
V tomto príspevku sa zameriame práve na obrázkovú formu argumentu.

## Obrázok ako argument

Ak máme úlohu, vieme ju v niektorých prípadoch vyriešiť obrázkom. Vieme k obrázkovému riešeniu zostaviť pôvodnú úlohu? Pozrime sa na nasledujúce príklady.

Príklad 1: Akú úlohu mohol riešiť žiak, ak riešením je:


Príklad 2: Akú úlohu mohol riešiť žiak, ak riešením je:



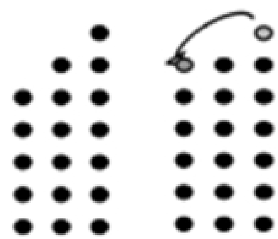
Pozrime sa teraz na niekoľko ukážok úloh, v ktorých možno použiť rôzne reprezentácie argumentu.

**Ukážka 1**: Overte platnosť tvrdenia: „Súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich čísel sa rovná trojnásobku prostredného čísla.“

**Riešenie 1** (empirický argument, vyskúšanie niekoľkých konkrétnych hodnôt spĺňajúcich zadanie):

| | |
|---|---|
| $4, 5, 6 = 15$ <br> $9, 10, 11 = 30$ | 15 aj 30 sú trojnásobkom stredného |

**Riešenie 2** (grafická reprezentácia): Ak vezmeme 1 z najväčšieho a pridáme k najmenšiemu, získame 3× prostredné číslo.

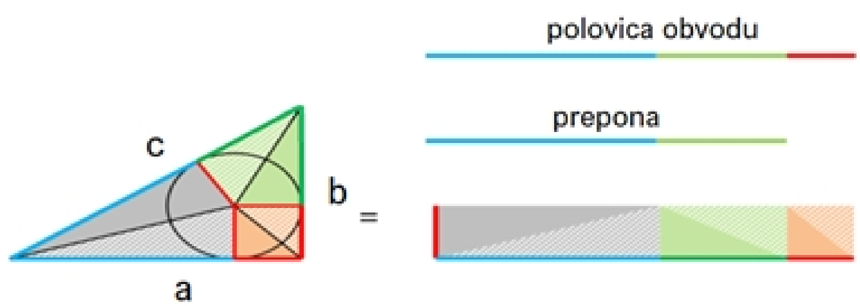


**Obrázok 2:** Grafický argument ukazujúci platnosť tvrdenia, zdroj: Lovin a kol., 2004, s. 1203.

**Riešenie 3** (symbolická reprezentácia): Zapíšeme ako $(n-1)+n+(n+1)$, čo je vlastne $3n$. Tvrdenie platí.

**Ukážka 2**: Je pravda, že obsah pravouhlého trojuholníka možno vyjadriť ako súčin polovice jeho obvodu a rozdielom tejto polovice a dĺžky prepony? (podľa Kubáček & Žabka, 2020, s. 123)

**Riešenie 1** (grafická reprezentácia).




**Obrázok 3:** Grafické riešenie, podľa Kubáček & Žabka, 2020, s. 123.

**Riešenie 2** (symbolická reprezentácia): Pre riešenie využívame značenie strán trojuholníka ako je uvedené na obrázku 3.

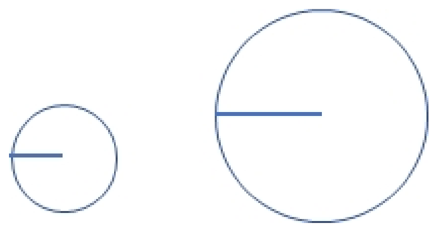
$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(ar + br + cr) = \frac{1}{2}r \cdot (a+b+c) = \frac{1}{2}r \cdot o, \text{kde } r = \frac{1}{2}o - c$$

Ako vidno z ukážok, obrázok nám vie riešenie uľahčiť, sprehľadniť. Nie vždy je však použitie obrázku prínosom. Porovnajme nasledujúce príklady.

**Príklad 3:** Keď odstrihneme časť tvaru, zmenší sa jeho obsah a obvod.

Riešením by mohol byť obrázok u príkladu 2, ktorý je vhodným a jasným argumentom, že tvrdenie pravdivé nie je, keďže pre niektoré objekty a strihanie tvrdenie platí (zmenší sa obvod aj obsah), no pre niektoré nie (obvod sa zväčší, obsah zmenší, alebo sa obsah zmenší a obvod zostane zachovaný).

**Príklad 4:** Ak zdvojnásobíme polomer kružnice, potom sa zdvojnásobí jej obvod.



**Obrázok 4:** Príklad nie vhodného nápomocného obrázku.

## Záver

Obrázok nie je vždy považovaný za argument, a výnimočne za dôkaz (výnimkou sú „dôkazy bez slov“, ktoré môžu byť veľmi náročné na pochopenie). Z vyššej matematiky sme zvyknutí, že „písmenká“ sú tie, ktoré sa „rátajú“, a ostatné sú len úvahy, pomôcky a pod. Čo je veľmi nevhodný odkaz pre študentov učiteľstva matematiky. Podľa vyjadrení skupiny študentov učiteľstva v už skôr spomínanom pilotnom výskume (Jánošková a kol. 2022, tento zborník) a po krátkom pôsobení na nich v rámci ich prípravy bola badateľná zmena z „obrázok nie je dosť matematický“ na „obrázok môže byť aj dôkaz“ ale jedným dychom dodané „nie každý, nie vždy, len na ZŠ, len u malých, ...“. Odkaz symbolickej reprezentácie je v skúmanej skupine študentov veľmi silný: „tomu viac verím, je to všeobecnejšie, obrázky moc konkrétne, ...“. Práve na zmenu pohľadu na grafickú formu argumentu a ukázanie viacerých možností a typov argumentov bude zameraný náš ďalší výskum, do ktorého sa zapoja aj partneri projektu, vďaka ktorému vznikol aj tento príspevok.

Tento príspevok vznikol v rámci projektu H2020 č. 951822 MaTeK (projectmatek.eu).

## Literatúra


[1] Jánošková, K., Kiss, T., Vráblová, L., & Slavíčková, M. (2022). Ako študenti učiteľstva vnímajú argumentáciu. *Dva dny s didaktikou matematiky.* Zborník príspevkov. PedF UK.

[2] Kilpatrick, J. (2001). The Strands of Mathematical Proficiency. In. J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findel (Eds.), *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (pp. 115–156). National Academies Press.

[3] Kubáček, Z., & Žabka, J. (2020). *Seminár z matematiky. Matematika pre maturantov.* 3. časť. MAPA Slovakia.

[4] Lovin, L. A., Cavey, L. & Whitenack, J. (2004). Evidence and justification: prospective pre K-8 teachers‘ proof-making and proof-evaluating. In D. E. McDougall, & J. A. Ross, (Eds.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Zv. 3, Toronto: OISE/UT.

[5] Stylianou, D., & Blanton, M. (2018). *Teaching with Mathematics Argument. Strategies for supporting everyday instruction.* Heinemann Portsmouth, NH.

[6] ŠPÚ (2014). *Štátny vzdelávací program. ISCED 2,* oblasť matematika. Štátny pedagogický ústav. Bratislava.

[7] Toulmin, S. (2003). *The uses of argument.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005