Rozvoj argumentačných schopností žiakov na druhom stupni základných škôl

Mária Slavíčková

Abstrakt

Schopnosť argumentovať je jednou zo kľúčových kompetencií, ktoré by sme vyučovaním matematiky mali rozvíjať. Aj keď učitelia s týmto, resp. jemu podobným výrokom, súhlasia, častokrát nevedia, ako podporiť argumentáciu a schopnosť tvorby matematického dôkazu na hodinách matematiky čo najprirodzenejšie. V tomto príspevku predstavíme niekoľko prístupov, ktoré možno priamo využiť na hodinách matematiky a primäť tak žiakov k argumentácii.

1 Úvod

Tvorcovia kurikula, autori učebníc a mnohí učitelia súhlasia s tvrdením, že argumentácia a dokazovanie by mali byť integrálnou súčasťou matematického vzdelávania. Samotné zaradenie argumentácie a dokazovania do vyučovania už býva náročnejšie. Ako vyšlo v pilotnej fáze prieskumu ohľadom využívania kurikulárnych zdrojov za účelom zistenia, aké zdroje a akým spôsobom učitelia matematiky využívajú v príprave na vyučovaciu hodinu, resp. priamo na vyučovacej hodine so zameraním na argumentáciu a dokazovanie, najmä mladí učitelia matematiky (s praxou kratšou ako 10 rokov) nie vždy vedia, ako na túto (aj podľa nich) dôležitú oblasť vzdelávania (viď Michal a kol. [4]).

Argument možno definovať ako nástroj, vďaka ktorému z počiatočných dát využitím legitímnych krokov prichádzame k tvrdeniu. [5] Z takejto definície možno argument spojiť s deduktívnym dôkazom, čo sa častokrát deje. Ako vyplýva z prípadovej štúdie u budúcich učiteľov matematiky [2], argument a deduktívny dôkaz vnímajú ako ekvivalentné pomenovania a nemyslia si, že na druhom stupni základnej školy je vhodné s dôkazmi (resp. deduktívnymi argumentami) začínať. Argument však môže mať viaceré podoby, resp. módy tak, ako ich definuje odborná literatúra. My sa zameriame len na jedno rozdelenie argumentov a to z pohľadu reprezentácie.

Podľa spôsobu reprezentácie možno argument rozdeliť do nasledovných typov: (a) verbálny, (b) symbolický, (c) grafický, (d) využitím modelov (fyzických, alebo digitálnych), (e) reálny kontext. Každý z nich je použiteľný v určitej forme už od prvého stupňa základnej školy. Podľa prístupu možno hovoriť o induktívnom, deduktívnom a abduktívnom argumente. Keďže abduktívny argument je prirodzenejší v menej deterministických vedách alebo pri pravdepodobnostných úlohách, nebudeme sa mu na tomto príspevku venovať.

2 Možné stratégie argumentácie v zvolenej úlohe

V matematike nezvykne existovať jediná správna cesta k riešeniu daného problému. Na nasledujúcej úlohe si ukážeme viaceré prístupy k jej riešeniu s charakterizovaním typov poskytnutých argumentov.

Znenie úlohy: Zistite, či súčet ľubovoľného nepárneho počtu po sebe idúcich prirodzených čísel je deliteľný počtom sčítancov. (Znenie úlohy je inšpirované [3]).

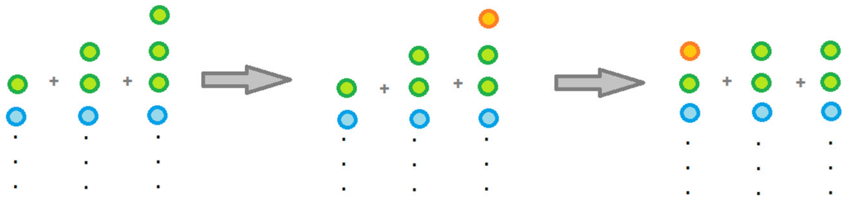
Riešenie tejto úlohy obsahuje niekoľko „vnorených" iduktívnych argumentov. Preto túto úlohu možno rozdeliť na niekoľko podúloh, ktoré je možné s triedou riešiť. Začať súčtom troch po sebe idúcich čísel ako samostatným zadaním a nadviazať otázkou, či to platí aj pre 4 po sebe idúce čísla, prípadne iný počet, aký počet a pod.

2.1 Grafické induktívne riešenie úlohy

Žiak môže začať najmenším počtom sčítancov, pri ktorom už považujeme, že sčitujeme prirodzené čísla. Keďže má ísť o nepárny počet sčítancov, začneme troma po sebe idúcimi číslami.

Obr. 1: Induktívny grafický argument (zatiaľ empirický)

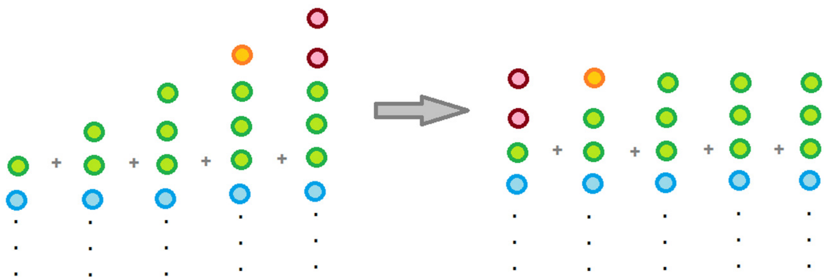
Kľúčový moment pre vyriešenie je uvedomenie si, že keď z reprezentácie najväčšieho čísla preložím jednotku k najmenšiemu číslu, získam tri rovnaké čísla. Že to platí pre ľubovoľnú trojicu ľubovoľných čísel, možno zobraziť aj ako je na obrázku 2.



Obr. 2: Grafické zovšeobecnenie postupu pri overení platnosti tvrdenia

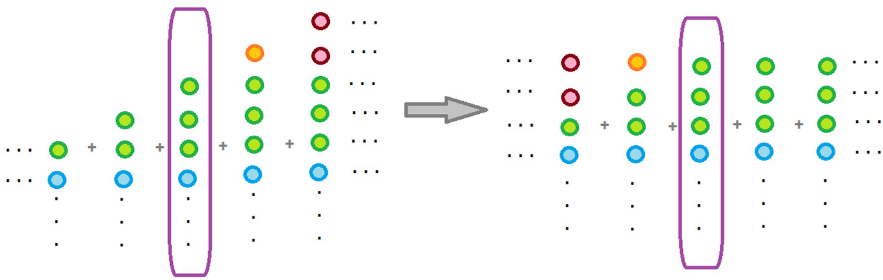
Uvedomením si, že pridaním „modrého“ riadku pracujem s ďalšími tromi po sebe idúcimi prirodzenými číslami a že takýmto pridávaním riadkov môžeme vygenerovať „všetky“ prirodzené čísla je ďalší kľúčový moment k podaniu pádneho induktívneho argumentu pre overenie platnosti tvrdenia.

Ako vidíme, aj v prípade s troma sčítancami je úloha pomerne komplexná a vyžaduje dve vyššie kognitívne operácie. Pre päť sčítancov môžeme využiť to, čo máme sformulované pre tri sčítance. Ak si toto žiak uvedomí, ide o zvládnutie tretieho kľúčového momentu pre úspešné vyriešenie všeobecne zadanej úlohy.



Obr. 3: Využitie myšlienky pre súčet 3 po sebe idúcich čísel na 5 po sebe idúcich čísel

Využitím grafickej reprezentácie možno pomerne jednoducho prísť k ďalšiemu kľúčovému bodu pre úspešné vyriešenie úlohy.



Obr. 4: Rozšírenie na súčet ľubovoľného nepárneho počtu po sebe idúcich prirodzených čísel

Ako vidno, grafická reprezentácia nám umožní odpozorovať vlastnosti čísel, na ktoré by sme pri symbolickom zápise možno ťažšie prišli. Samozrejme, obrázok 4 je diskutabilný, keďže nie je jasné, koľko stĺpcov je pred a za zvýrazneným (vieme iba, že ich musí byť rovnako veľa) a tiež, či možno dopĺňať „naľavo" od jednotky. Toto sú ale záležitosti, ktoré vedia rozprúdiť podnetnú diskusiu v triede a na ktoré treba upozorniť, ak s nimi žiaci sami neprídu.

2.2 Symbolické induktívne riešenie úlohy

Pôjdeme systematickým výpisom nepárneho počtu sčítancov po sebe idúcich prirodzených čísel. Pri symbolickom riešení možno badať silnú paralelu s grafickým. Viacerí žiaci (ale aj učitelia) považujú symbolicky komunikovaný argument za validnejší (podobné závery odpozoroval aj Dreyfus. [1]

Pre tri po sebe idúce prirodzené čísla vyskúšame niekoľko hodnôt a pokúsime sa záver zovšeobecniť: $1 + 2 + 3 = 6$, súčet je deliteľný 3. Ďalšia trojica: $2 + 3 + + 4 = 9$, súčet je deliteľný 3, nasledujúca trojica $3 + 4 + 5 = 12$, súčet je opäť deliteľný 3. Za predpokladu, že k je prirodzené číslo, možno súčet troch po sebe idúcich čísel zapísať ako $(k - 1) + k + (k + 1)$. Súčtom troch po sebe idúcich prirodzených čísel je $3k$, takže je deliteľný troma. Pre tri sčítance tvrdenie platí.

Pre päť po sebe idúcich čísel môžeme využiť všeobecný zápis, ku ktorému sme dospeli v predchádzajúcej možnosti. Preto za predpokladu, že k je prirodzené číslo väčšie, nanajvýš rovné 3, pre súčet piatich po sebe idúcich prirodzených čísel platí: $(k - 2) + (k - 1) + k + (k + 1) + (k + 2) = 5k$, teda deliteľný päťkou, preto aj pre päť po sebe idúcich prirodzených čísel tvrdenie platí.

Pre zovšeobecnenie na súčet ľubovoľného nepárneho počtu po sebe idúcich čísel však treba už schopnosť abstraktne myslieť. V tomto momente by určite pomohla pre lepšiu predstavu grafická reprezentácia. Pre ľubovoľný nepárny počet m po sebe idúcich prirodzených čísel si stačí uvedomiť, že $(m - 1)/2$ naľavo od prostredného člena a $(m - 1)/2$ napravo od prostredného člena sa spočíta na $(m - 1)k$, prostredný člen má hodnotu k, takže dostávame $(m - 1)k + k = mk$, a preto je súčet deliteľný počtom sčítancov.

2.3 Deduktívny argument s využitím viacerých reprezentácií

Ak sa žiaci s podobnou úlohou ešte nestretli, nepredpokladáme deduktívny argument ani pri jej zjednodušení a venovaní sa len jednej z možností (napr. pre tri sčítance). Vzhľadom na vyššiu formálnosť zápisov aj uvažovania predpokladáme jeho pochopenie a zvládnutie žiakov riešiacich matematickú olympiádu, alebo „bežných" žiakov stredných škôl so všeobecným zameraním.

3 Záver

Ako vidno z poskytnutých reprezentácii a riešení danej úlohy, možno vekovo primerane akceptovať rôzne reprezentácie čísel a aj pri symbolickom reprezentovaní nám môže grafické výrazne pomôcť. Nejde o nové zistenie, už z histórie vidíme, že rozvoj algebry a aritmetiky bol úzko spojený s geometrickou predstavou. Figurálne čísla sú ďalším príkladom grafickej reprezentácie čísel a operácií s nimi.

Zadávaním komplexnejších úloh (ako napr. v tomto príspevku), ale aj jednoduchších, kde grafická reprezentácia vie napomôcť k riešeniu alebo pochopeniu úlohy a vznikajúcich vzťahov, môžu prispieť k lepšej argumentácii žiakov na všetkých stupňoch od primárneho. Samozrejmosťou je veková primeranosť úlohy a tiež kognitívne primeraná požadovaná miera abstrakcie pri argumentovaní o nájdenom riešení (vrátane možnosti, že „riešenie neexistuje").

Poďakovanie

Tento článok vznikol vďaka projektu Horizon 2020 č. 951822 MaTeK.[1]

Literatúra

[1] DREYFUS, T. Mutual expectations between mathematicians and mathematics educators (with contributions by U. Onn, I. Mamona-Downs & S. Lerman). In M. Fried, T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics and mathematics education: searching for common ground.* Springer: Advances in Mathematics Education series, 2017, 57–71.

[2] JÁNOŠKOVÁ, K., VRÁBLOVÁ, L, KISS, T., a SLAVÍČKOVÁ, M. Ako študenti učiteľstva vnímajú argumentáciu. In *Dva dny s didaktikou matematiky. Zborník príspevkov.* Praha: PedF UK Praha, 2022.

[3] LOVIN, L., CAVEY, L., WHITENACK, J. Evidence and Justification: Prospective PREK-8 Teachers' Proof-Making and Proof-Evaluating. In D. E. McDougall, J. A. Ross (Eds.) *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Toronto: OISE/UT, 2004, pp. 1201–1208.

[1] http://projectmatek.eu