Na čo (bolo) treba rysovať

Zbyněk Kubáček

Abstrakt

Riešenie niektorých úloh bolo v minulosti založené na dostatočne presnom rysovaní. Uvedieme príklady takýchto problémov a zamyslíme sa nad možnosťami ich použitia v dnešnom vyučovaní matematiky.

Klíčová slova: geometria, rysovanie, konštrukčné úlohy, meranie neprístupných vzdialeností, ornament, letecká navigácia.

Tri vety na úvod

Úlohu typu „zostrojte trojuholník, v ktorom poznáte stranu $a = 5$ a uhly $\beta = 42^\circ$ a $\gamma = 73^\circ$“ pravdepodobne na základnej škole riešil každý z nás. Asi nie som sám, kto sa pri rysovaní až tak netrápil, či jeho uhol β má veľkosť presne 42° – dôležité pre mňa bolo objaviť postup konštrukcie, realizácia už nebola tak zaujímavá. V tomto príspevku ukážeme príklady úloh, kde presné rysovanie *je*, resp. *bolo* dôležité – mohli od neho závisieť

- peniaze (plošné výmery pozemkov – ktoré boli podkladom pre výpočet dane – sa počítali z katastrálnych máp, ktoré museli predtým zememerači narysovať),
- estetický pocit (nepresne narysovaná gotická kružba stráca veľa zo svojej krásy),
- niekedy dokonca aj život (nesprávne určený kurz lietadla mohol za 2. svetovej vojny viesť k tragickým koncom).

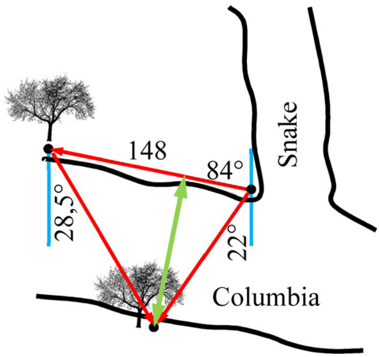
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, kubacek@fmph.uniba.sk

Zememerači

V dnešnej školskej matematike sa so zememeračskými úlohami – zistiť výšku neprístupného objektu, vzdialenosť dvoch neprístupných bodov a pod. – stretávame spravidla v trigonometrii, kde sa na riešenie používa výpočet. V minulosti sa však takéto úlohy často riešili rysovaním. Nasledujúci príklad takéhoto postupu (zasadený do historického kontextu) je z (Kubáček, 2015, s. 17).

V roku 1803 USA kúpili od Francúzska Louisianu. Získané územie bolo treba zmapovať, jednu z výprav, ktoré mali túto úlohu, viedli Meriwether Lewis a William Clark. 18. 10. 1805 si Clark zapísal do svojho denníka: Zmeraná šírka rieky Columbia, z východiskového bodu k bodu na druhej strane rieky je J22°Z (*tento opis smeru znamená, že od južného smeru sa odchýlime* 22° *k západu*), z východiskového bodu k bodu proti toku Columbie je S84°Z, 148 *pole* (*1 pole je asi 0,503 m*), odtiaľ k bodu na druhej strane rieky je J28,5°V.

V tomto prípade stačí – vo vhodnej mierke (o jej voľbe možno v triede diskutovať) – zostrojiť trojuholník určený stranou a dvoma uhlami (nie náhodou sme túto konštrukciu spomenuli v úvode), zmerať v ňom príslušnú výšku a odmeranú veľkosť previesť na skutočnú vzdialenosť, pozri obrázok 1.

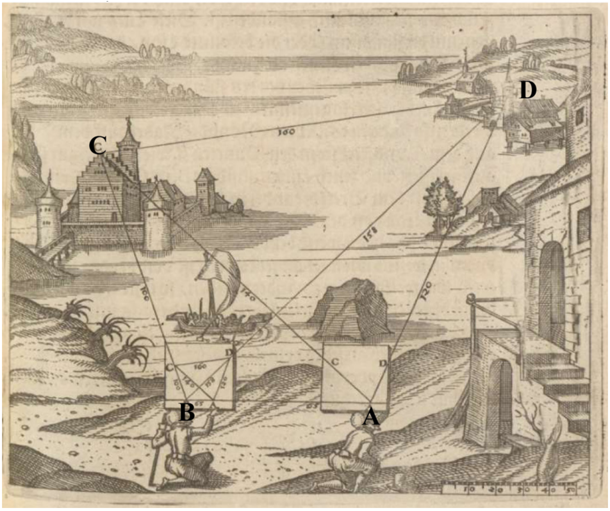


Obr. 1: Meranie šírky rieky, šírku predstavuje dĺžka zelenej úsečky (Kubáček, 2015, s. 17)

Ďalšia klasická zememeračská úloha – meranie vzdialenosti dvoch neprístupných objektov C a D – je znázornená na obrázku 2:

ak vieme narysovať obidva trojuholníky ABC a ABD	(na to stačí poznať veľkosť $\lvert AB\rvert$ a v obidvoch trojuholníkoch uhly pri vrcholoch A a B),

tak vieme z narysovaného obrázka odmerať hľadanú dĺžku $|CD|$.

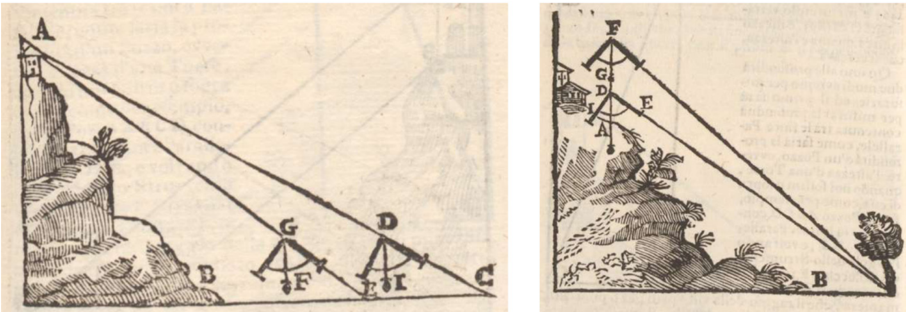


Obr. 2: Meranie vzdialenosti dvoch neprístupných bodov (Zubler, 1607, s. 11)

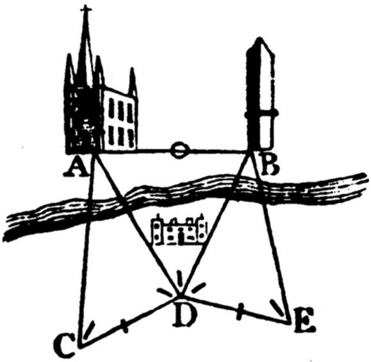
Poznamenajme, že postup znázornený na obrázku – známy ako *stolová metóda* (alebo *metóda meračského stola*) – nevyžaduje použitie nástroja na meranie uhlov. V minulosti sa používal na mapovanie (a dnes – ak to učiteľ uzná za vhodné – môže ozvláštniť školské vyučovanie napríklad mapovaním na školskom dvore).

Hoci náš príspevok je primárne o rysovaní, bola by škoda nevyužiť ďalšie možnosti, ktoré obrázky rôznych zememeračských postupov poskytujú. Napríklad neprezradiť, meranie ktorej dĺžky obrázok znázorňuje a nechať na to prísť žiaka: čo chceme zmerať, čo vieme zmerať a či zmerané údaje stačia na zistenie hľadanej veľkosti (t. j. – keďže všetky takéto postupy súvisia s konštrukciou trojuholníkov – či zmerané údaje stačia na určenie trojuholníka, s ktorým súvisí hľadaná veľkosť). Ako príklad vhodných obrázkov uvádzame dva ilustrácie z knihy o geometrickom a vojenskom kružidle od Galilea Galileiho (kniha je z r. 1606, Galilei nástroj vymyslel cca 1595–1598), pozri obrázok 3. Ďalšie vhodné obrázky čitateľ nájde napr. v (Kubáček, 2013, s. 91–93).

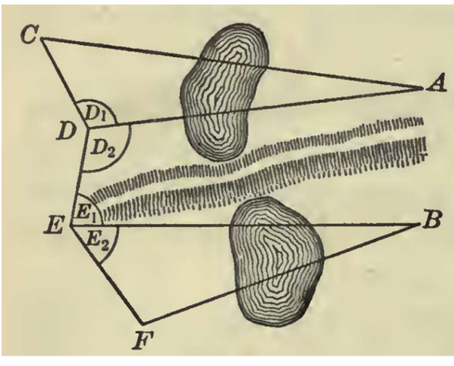
Na takéto objavovanie môžeme použiť aj obrázky zložitejších zememeračských postupov, napr. na obrázkoch 4 a 5 je znázornené meranie vzdialenosti dvoch neprístupných objektov, ktoré je komplikovanejšie než situácia znázornená na obrázku 2 (tam obidva neprístupné objekty C a D vidno z obidvoch prístupných bodov A a B):



Obr. 3: Dve merania z knihy o geometrickom a vojenskom kružidle (Galilei, 1741, s. 53 a s. 56)



Obr. 4: Meranie vzdialenosti neprístupných objektov A a B (Keith, 1839, s. 65)



Obr. 5: Meranie vzdialenosti neprístupných objektov A a B (Wilczynski, 1914, s. 122)

- na obrázku 4 vidno obidva neprístupné body A a B len z bodu D,
- na obrázku 5 neexistuje bod, z ktorého by bolo vidno obidva neprístupné body A a B naraz.

Žiakovou úlohou je opäť určiť, ktoré vzdialenosti a ktoré uhly treba odmerať, aby sa pomocou nich dala určiť neznáma vzdialenosť $|AB|$.

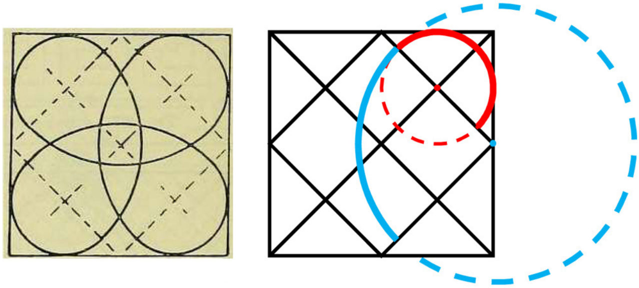
Zememeračské úlohy z obrázkov 1 až 5 možno riešiť aj výpočtom – stačí na to sínusová a kosínusová veta. Treba však zvážiť náročnosť a dĺžku týchto výpočtov:

- úlohy z obrázkov 1 a 3 patria k tým jednoduchším (a ich výpočtové riešenie nájdeme aj v mnohých súčasných učebniciach), v tomto prípade stojí za úvahu riešiť úlohu obidvoma postupmi: výpočet môže slúžiť ako kontrola presnosti rysovania, naopak rysovanie môže byť testom správnosti výpočtu,
- vo výpočtovo náročnejších úlohách z obrázkov 2, 4 a 5 je vhodnejšie obmedziť sa len na opis postupu výpočtu: žiak určí, ktoré veľkosti treba postupne vypočítať a aký matematický aparát na ich výpočet možno použiť (práve náročnosť výpočtov robí z týchto úloh vhodných adeptov na riešenie pomocou rysovania, vďaka tomu ich možno využiť vo vyučovaní skôr, než sa žiaci stretnú so sínusovou a kosínusovou vetou).

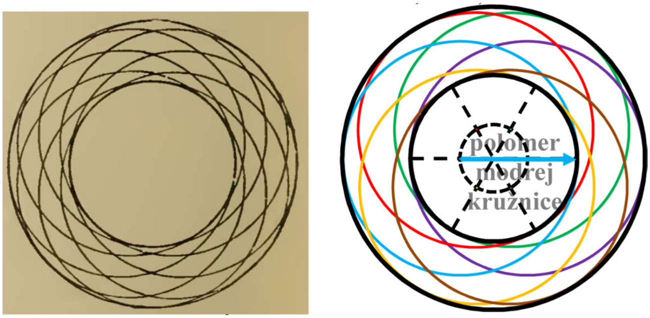
Ornamenty

V predchádzajúcej časti bolo treba rysovať čo najpresnejšie, aby sme z narysovaného obrázka meraním získali dostatočne presné údaje. V nasledujúcich úlohách bude treba rysovať presne, aby vznikli pekné obrázky. Rovnako ako v predchádzajúcej časti, aj teraz sa neobmedzíme len na rysovanie a budeme sa snažiť využívať všetky príležitosti na „robenie matematiky“. Niektoré z nich s rysovaním ornamentov – lebo o nich bude teraz reč – súvisia úplne prirodzene: v hre je totiž vždy postup. Ten môže byť daný (pričom – ako uvidíme – aj pochopenie a „rozkľúčovanie“ daného postupu môže byť pomerne veľká výzva), inokedy ho treba objaviť.

Začneme dvoma úlohami z učebníc kreslenia zo začiatku 20. st., pozri obrázky 6 a 7. V obidvoch treba narysovať ornament na obrázku vľavo, v prvom prípade sú pomôckou prerušované úsečky, v druhom prípade je daný polomer vonkajšej „ohraničujúcej“ kružnice (teda žiak musí na obrázku odmerať obidva polomery a dopočítať veľkosť polomeru vnútornej „ohraničujúcej“ kružnice). Postup konštrukcie má v obidvoch prípadoch objaviť žiak, podstatné je využitie poznatku, že stredy dvoch dotýkajúcich sa kružníc a bod ich dotyku musia ležať na jednej priamke. Riešenia sú naznačené na obrázkoch vpravo.

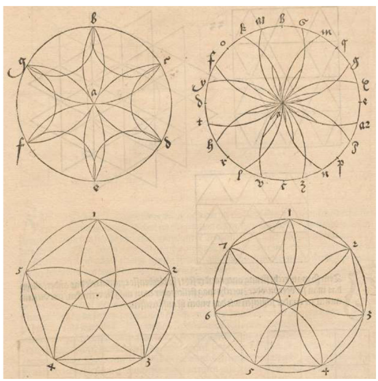


Obr. 6: Úloha zo (Spooner, 1911, s. 92)



Obr. 7: Úloha zo (Spanton, 1913, s. 248)

Úloha z obrázka 7 môže byť po jej vyriešení podnetom pre ďalšie otázky, napríklad či polomery vnútornej a vonkajšej kružnice nejako súvisia, alebo ich možno voliť ľubovoľne. (Poznamenajme, že s ornamentmi z kružníc sa nestretneme iba v učebniciach – tie na obrázku 8 pochádzajú od významného renesančného maliara, grafika a teoretika umenia Albrechta Dürera.)

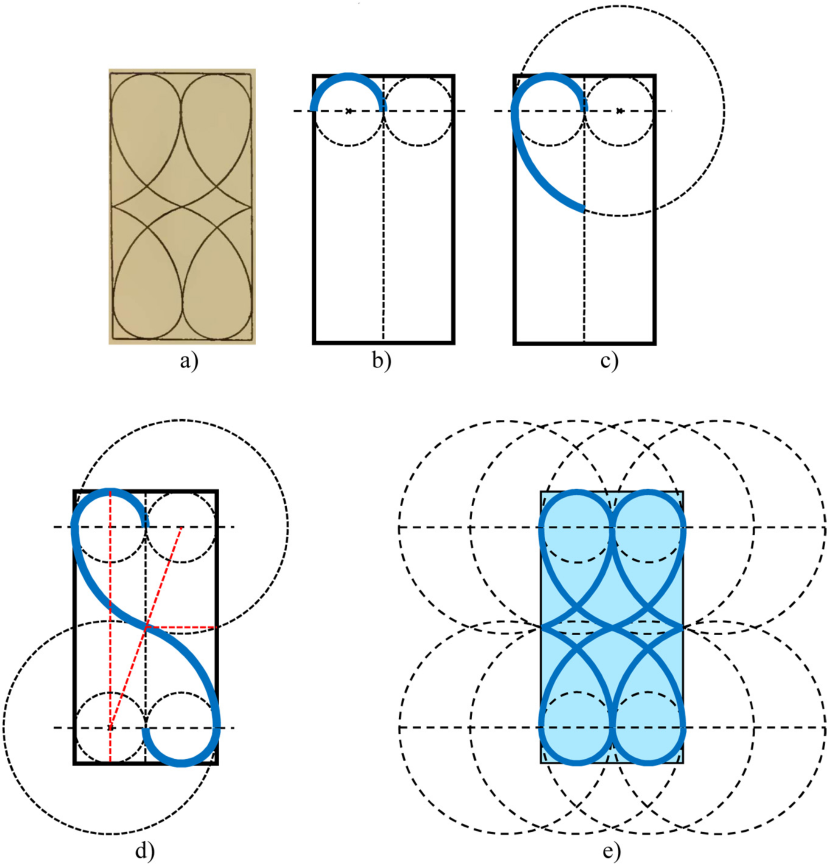


Obr. 8: Ornamenty z (Dürer, 1538, s. 65)

Pokračujeme ďalším ornamentom, opäť z učebnice (Spanton, 1913, s. 248), pozri obrázok 9. Úlohou je narysovať ornament na obrázku 9a), pričom vieme, že ten pozostáva iba z oblúkov kružníc s polomermi r a $3r$. Postup rysovania vidno na obrázkoch

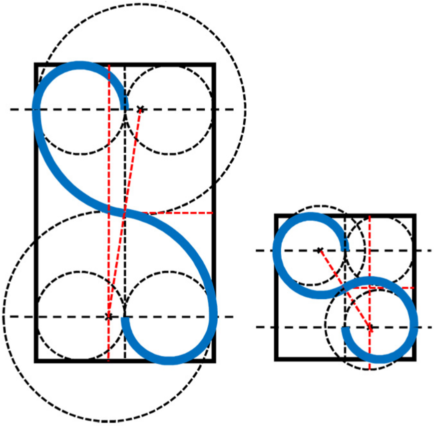
- 9b): zvolíme polomer menšej kružnice, tým je určená šírka, teda vodorovný rozmer obdĺžnika, do ktorého je ornament vpísaný,
- 9c): vieme, že kružnica s trojnásobným polomerom má hladko nadviazať na polkružnicu z obrázka 9b),
- 9d): využijeme stredové a osové súmernosti ornamentu.

Riešenie znázornené na obrázku 9e) je súčasne príkladom obrázkového návodu (s podobnými sa stretneme v niektorých z nasledujúcich úloh).



Obr. 9: Ornament zo (Spanton, 1913, s. 248)

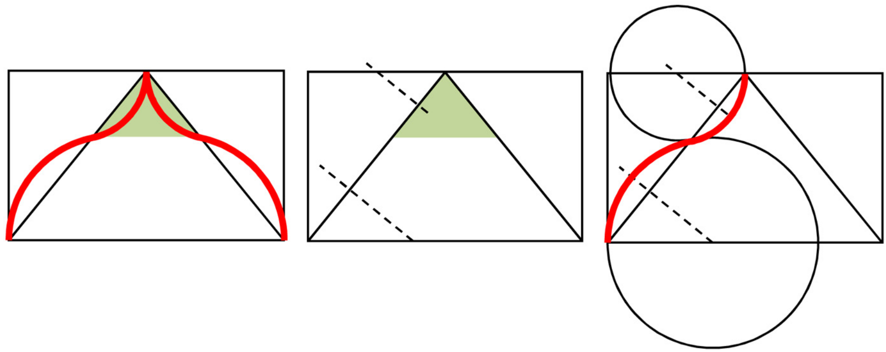
Úlohu 9 možno doplniť otázkou: čo by sa stalo, keby polomer veľkej kružnice **ne**bol 3-násobok polomeru malej? Ako vidno z obrázka 10, konštrukcia by fungovala rovnako, len by sa zmenili rozmery obdĺžnika, do ktorého je ornament vpísaný, pozri dva rôzne príklady na obrázku 10.



Obr. 10: Rôzne verzie ornamentu z obrázka 9

Na to môžeme nadviazať ďalšou otázkou: ako postupovať, ak chceme ornament z obrázkov 9a) a 10 vpísať do obdĺžnika s *danými* rozmermi? Existuje riešenie pre ľubovoľný obdĺžnik, alebo musia rozmery obdĺžnika spĺňať nejaké podmienky, aby sa doň dal uvedený ornament vpísať? (Inšpiráciu k riešeniu týchto otázok čitateľ nájde v nasledujúcej úlohe).

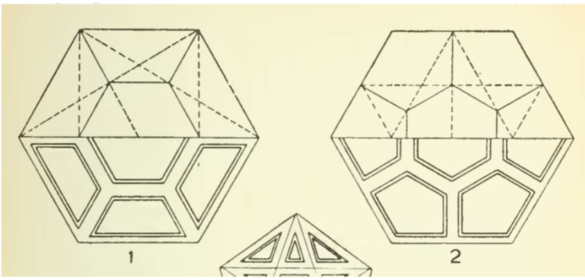
Skúsenosti s rysovaním hladko na seba nadväzujúcich kružnicových oblúkov, ktoré sme získali v predchádzajúcich úlohách, môžeme využiť pri rysovaní benátskeho oblúka. Ten je osovo súmerný a každá jeho „polovica“ sa skladá z dvoch kružnicových oblúkov, ktoré na seba hladko nadväzujú, pozri obrázok 11. Benátske oblúky môžu byť rôzne, nastáva tu podobná situácia ako v prípade ornamentu z obrázka 9a): rozmery obdĺžnika, do ktorého je benátsky oblúk vpísaný, závisia od polomerov kružnicových oblúkov, z ktorých sa benátsky oblúk skladá. Navyše zistíme, že opísaným obdĺžnikom nie je benátsky oblúk určený jednoznačne. Potrebujeme ešte ďalšiu informáciu, napríklad pomer polomerov kružnicových oblúkov, alebo bod, v ktorom na seba tieto oblúky nadväzujú. Riešenie pre druhú z uvedených možností je na obrázku 11 (zelený trojuholník vymedzuje oblasť, v ktorej sa nachádza vrchná časť benátskeho oblúka, jeho voľbou je už v danom obdĺžniku benátsky oblúk určený jednoznačne), pozri tiež napr. (Kubáček, 2013, s. 35).



Obr. 11: Jedna z možností, ako narysovať benátsky oblúk

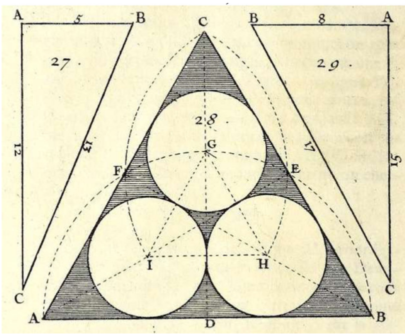
V doteraz uvedených príkladoch bolo úlohou žiaka objaviť postup, ako ornament narysovať. V nasledujúcich úlohách bude návod na rysovanie súčasťou zadania. Mohlo by sa zdať, že takéto úlohy budú pre žiaka jednoduchšie; ako však uvidíme, nemusí to byť úplne pravda.

Prvá dvojica obrázkových návodov je z monografie o ornamentoch Augusta Garneriho z r. 1891, pozri obrázok 12. Žiakovou úlohou je určiť poradie, v akom treba narysovať jednotlivé pomocné čiary a určiť, ktorými bodmi (z predchádzajúcich častí postupu) sú jednotlivé úsečky určené (a prípadne – keďže v tomto príspevku hovoríme o rysovaní – ornament aj narysovať).



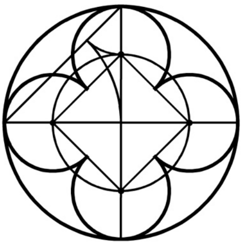
Obr. 12: Obrázkové návody z (Garneri, 1921, s. 77)

Náročnejšou verziou takéhoto zadania je dešifrovať obrázkové riešenie úlohy XXIV „do rovnostranného trojuholníka vpíšte tri dotýkajúce sa kružnice s rovnakým polomerom“ z kedysi populárnej zbierky úloh Jacquesa Ozanama, pozri obr. 13 (na obranu Ozanama treba povedať, že v jeho zbierke je uvedený aj slovný opis postupu konštrukcie, ten však možno vydedukovať aj z obrázka a to je práve úlohou žiaka v našom zadaní).

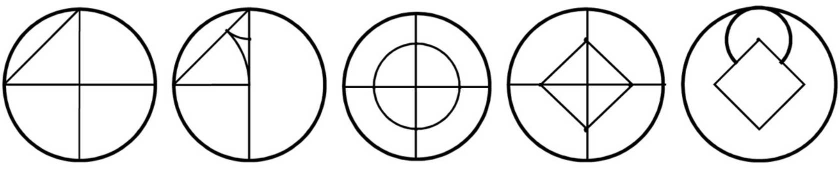


Obr. 13: (Ozanam, 1694, s. 168)

Veľkým zdrojom námetov súvisiacich s rysovaním sú gotické ornamenty (gotikou však nie sú všetky možnosti vyčerpané, napríklad pre námety súvisiace s oválom pozri (Kubáček, 2013, s. 74–78)). Jedným z typických predstaviteľov je štvorlístok. Obrázkový návod na konštrukciu štvorlístka vpísaného do daného kruhu (to je tá ťažšia z dvoch možností, ľahšia je skonštruovať štvorlístok a potom mu opísať kružnicu) je na obrázku 14, „rozkrokovaná“ verzia je na obrázku 15. Závisí na uvážení učiteľa, či žiakom zadá len obrázok 14 (cieľom je objaviť poradie jednotlivých krokov) alebo obrázok 15 (jednoduchší – ale stále nie úplne elementárny – cieľ je obrázkový návod správne interpretovať a realizovať).



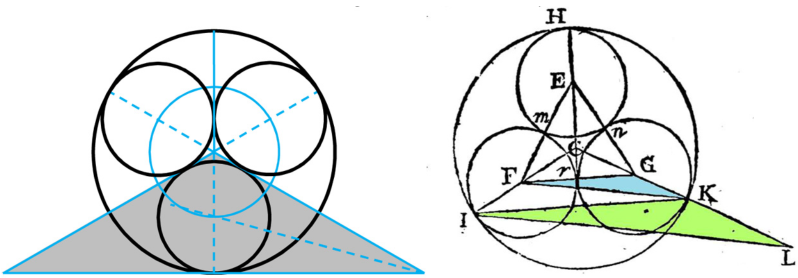
Obr. 14: Obrázkový návod na rysovanie gotického štvorlístka (Kubáček, 2013, s. 74)



Obr. 15: Predchádzajúci návod, teraz „rozkrokovaný“ (Kubáček, 2013, s. 74)

Ďalší typický gotický motív (presnejšie povedané, podklad pre gotické ornamenty) sú tri kružnice s rovnakým polomerom vpísané do daného kruhu. Na obrázku 16 sú dva rôzne návody:

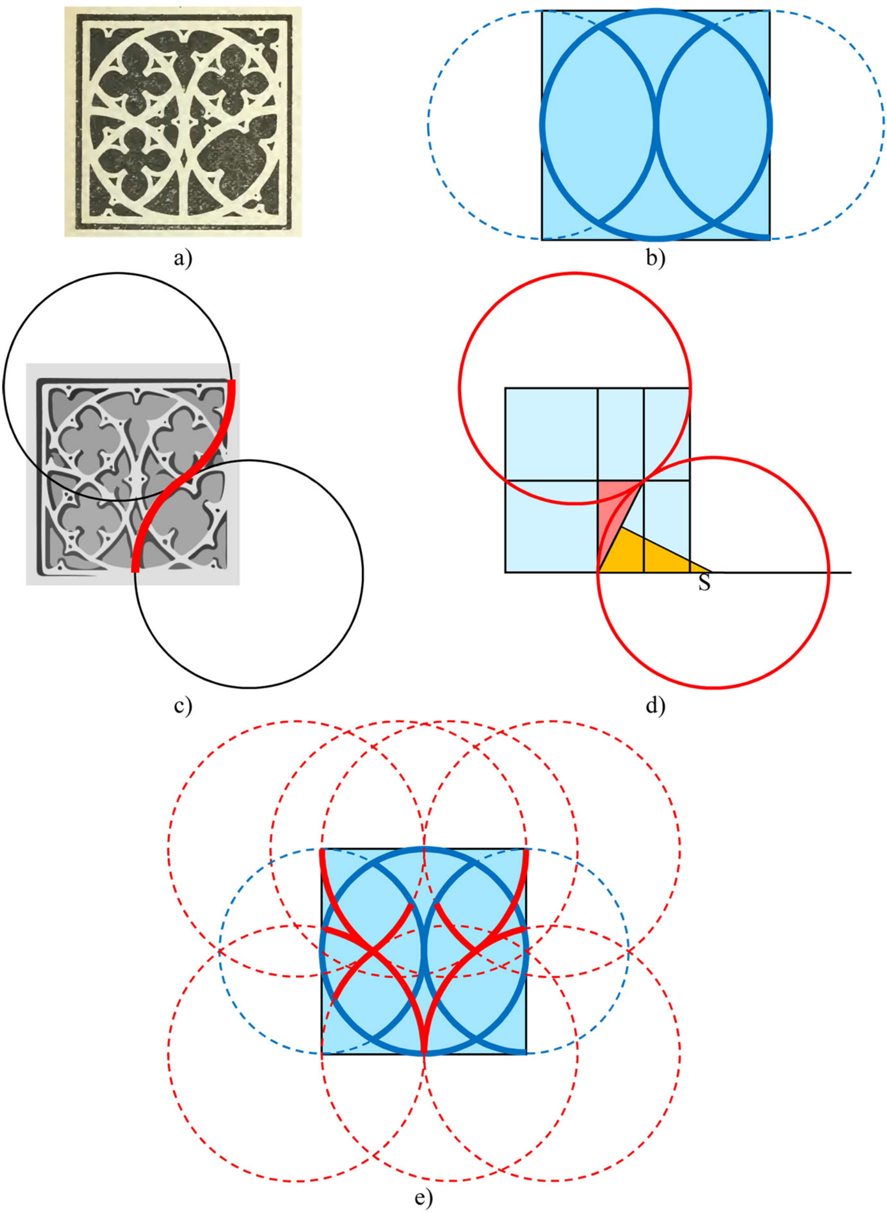
- V prvom využívame, že každá z hľadaných troch menších kružníc je vpísaná aj do sivého trojuholníka na obrázku (objavenie zvyšku postupu je už úloha pre žiaka).
- Druhý návod je z učebnice (Simpson, 1800, s. 348), ktorej prvé vydanie vyšlo v r. 1745. Jeho podstatou je rovnosť $|FG| = 2|GK|$. Trojuholník IKL vieme skonštruovať, následne vieme zostrojiť úsečku KF – dostaneme tak stred F vpísanej kružnice (zdôvodnenie uvedenej rovnosti aj formulácia celého postupu konštrukcie je úloha pre žiaka).



Obr. 16: Dva rôzne postupy konštrukcie troch kružníc vpísaných do väčšej kružnice, (Kubáček & Žabka, 2020, s. 121) a (Kubáček & Žabka, 2020, s. 92) podľa (Simpson, 1800, s. 348)

Myšlienky obidvoch týchto návodov možno použiť aj pri konštrukcii štvorlístka – ten je tvorený oblúkmi štyroch dotýkajúcich sa kružníc s rovnakým polomerom vpísaných do kruhu.

Náš posledný príklad v tejto časti (zadanie je z (Kubáček & Žabka, 2020, s. 89)) predstavuje pomerne náročnú verziu úlohy o objavení postupu konštrukcie ornamentu – učiteľ preto pri jej zadávaní musí zvážiť, ktoré informácie žiakom prezradiť, resp. akou formou úlohu riešiť (v skupinách, spoločne na hodine, rozkrokovanú na menšie časti a pod.). Na obrázku 17a) je gotický motív z domu stojaceho na námestí v Norimbergu. Jeho základná kostra (do ktorej nepatria sférické štvorlístky a drobné ozdoby) je vytvorená z kružnicových oblúkov, pričom sú použité oblúky s dvoma rôznymi polomermi. Obrázky 17b), c) znázorňujú postupné objavovanie štruktúry: na obrázku 17b) sú zvýraznené všetky oblúky, ktoré majú menší z dvoch polomerov, na obrázku 17b) jedna dvojica na seba nadväzujúcich oblúkov s väčším polomerom. Poloha týchto oblúkov (sú navzájom



Obr. 17: Gotický motív z domu stojaceho na námestí v Norimbergu a jeho konštrukcia

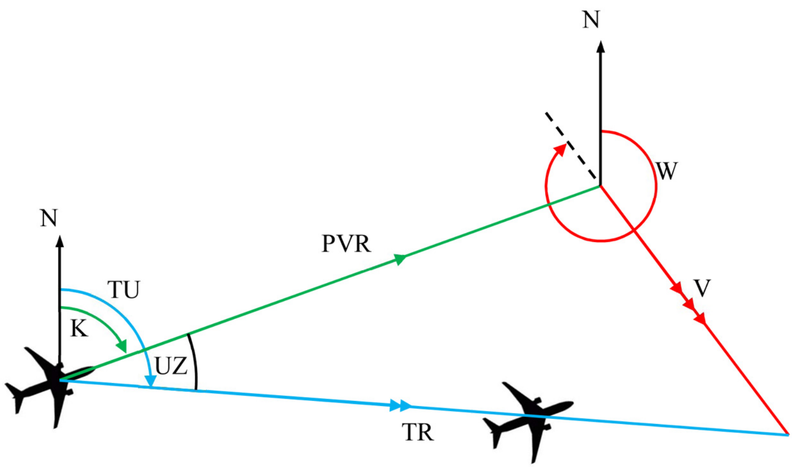
súmerné, horný sa dotýka bočnej strany opísaného štvorca, hladko na seba nadväzujú) umožňuje zistiť polohu ich stredu (a teda aj ich polomer: ak modrá kružnica na obrázku 17b) má polomer $r = 1$, tak červená kružnica na obrázku 17d) má polomer $R = 1{,}25$).

Leteckí navigátori

V tejto časti sa od kružníc vrátime ku konštrukcii trojuholníkov. Na rozdiel od prvej – zememeračskej – časti, kde sme vystačili s konštrukciami typu uhol-strana-uhol, sa teraz stretneme aj s inými prípadmi.

Základ pre úlohy z leteckej navigácie je navigačný trojuholník (niekedy tiež trojuholník rýchlostí alebo trojuholník vetra), pozri obrázok 18:

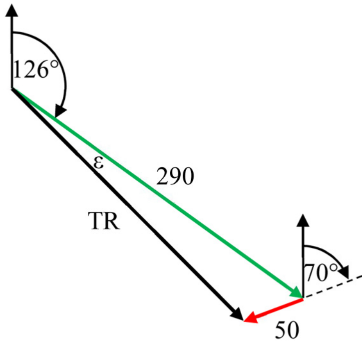
- Šípka s písmenom N označuje sever (šípky nie sú umiestnené na konci vektora – ako je zvykom v matematike – ale vnútri úsečky znázorňujúcej vektor).
- Vektor pravej vzdušnej rýchlosti je určený kurzom K a veľkosťou pravej vzdušnej rýchlosti PVR, vektor vetra je určený smerom vetra W a veľkosťou jeho rýchlosti V (pozor, smer vetra je smer, z ktorého vietor fúka, teda napríklad severozápadný vietor bude znázornený vektorom smerujúcim na juhovýchod). Ich súčtom je vektor traťovej rýchlosti opísaný traťovým uhlom TU a veľkosťou traťovej rýchlosti TR. Uhol UZ, ktorý určuje odchýlku traťového uhla od kurzu, sa nazýva uhol znosu.



Obr. 18: Navigačný trojuholník (Kubáček & Žabka, 2020, s. 181)

(Poznamenajme ešte, že letecká navigácia je v mnohom blízka námornej navigácii: loď unáša vodný prúd, v prípade lietadla úlohu vody hrá masa vzduchu unášaná vetrom.)

Príklad najzákladnejšej úlohy leteckej navigácie, pozri obrázok 19: Poznáte vektor pravej vzdušnej rýchlosti (PVR = 290 km/h, K = 126°) a vektor vetra (W = 70°, V = 50 km/h). Zistite traťový uhol a veľkosť traťovej rýchlosti (teda kam a akou rýchlosťou vlastne letíte) a uhol znosu (teda o koľko sa kurz líši od traťového uhla).

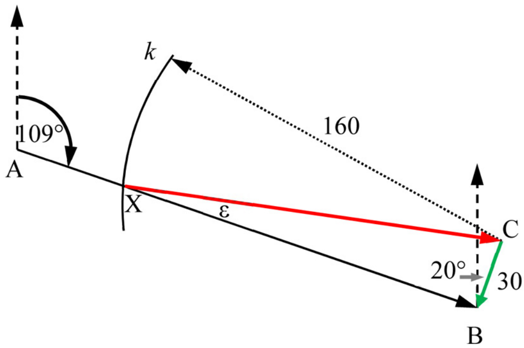


Obr. 19: Základná úloha leteckej navigácie

Na nájdenie riešenia stačí narysovať vo vhodnej mierke situáciu znázornenú na obrázku 19 a odmerať veľkosť TR a uhol ε (samozrejme aj tu možno použiť výpočet, ten však teraz nie je v centre našej pozornosti).

Nenechajte sa pomýliť zdanlivým fatalizmom predchádzajúcej úlohy (nastavíme smer a rýchlosť a zisťujeme, kam vlastne doletíme): aby sme mohli riešiť zmysluplnejšie úlohy, musíme najprv porozumieť riešeniu takýchto základných (a to neplatí len pre úlohy leteckej navigácie). Tou zmysluplnejšou je napríklad takáto úloha: vieme, kam chceme doletieť, vieme, ako rýchlo poletí lietadlo (voči vzduchu) a poznáme vietor. Otázka znie: aký kurz treba nastaviť na kormidlách a kedy doletíme do cieľa? S konkrétnymi hodnotami: Poznáte traťový uhol TU = = 109° (ten je určený spojnicou bodu, z ktorého štartujete, a bodu, kam chcete doletieť), smer a rýchlosť vetra (W = 20°, V = 30 uzlov) a veľkosť pravej vzdušnej rýchlosti (PVR = 160 uzlov). Máte určiť kurz a traťovú rýchlosť. Riešenie znázornené na obrázku 12 je vlastne konštrukcia trojuholníka XBC, v ktorom poznáme dve strany (BC a XC) a uhol proti väčšej z nich. V narysovanom obrázku odmeriame

- veľkosť XB, ktorá určuje traťovú rýchlosť (z nej a zo známej vzdialenosti štartu a cieľa vieme vypočítať dobu letu),
- uhol ε (hľadaný kurz má potom veľkosť $109° - \varepsilon$).



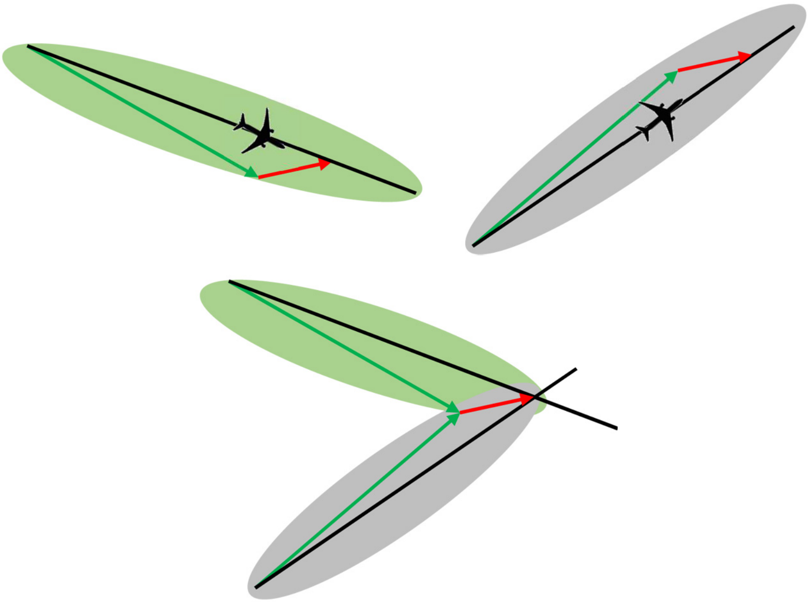
Obr. 20: Ďalšia z úloh leteckej navigácie

Obdobná úloha, len s vymenenou známou a neznámou rýchlosťou: čas letu je určený (tým je určená aj traťová rýchlosť), chceme zistiť, akou vzdušnou rýchlosťou (a – samozrejme, ako predtým – pod akým kurzom) treba letieť.

Informácia o smere a rýchlosti vetra je dôležitá. Kedysi ju navigátor dostal od meteorológov pred štartom, počas letu ju však musel zisťovať sám. Robilo sa to pomocou znosu pri dvoch rôznych kurzoch (postup opisujeme podľa príručky leteckej navigácie z 2. svetovej vojny): navigátor poznal kurz a pravú vzdušnú rýchlosť lietadla a pozorovaním zistil traťový uhol, toto meranie potom zopakoval pri inom kurze lietadla (tieto dve merania sú znázornené na zeleno a sivo podfarbených obrázkoch v hornej časti obrázka 21). Potreboval zistiť smer a rýchlosť vetra, ktorú reprezentuje na obidvoch obrázkoch tá istá červená orientovaná úsečka. Riešenie bolo založené na peknej myšlienke (pozri spodnú časť obrázka 21): ak situácie znázornené na dvoch horných obrázkoch nakreslíme do jedného obrázka tak, aby sa červené orientované úsečky prekryli, tak dostaneme obrázok, ktorý vieme narysovať (lebo poznáme smer a veľkosti zelených úsečiek a smer čiernych priamok). Z narysovaného obrázka už vieme odmerať smer aj veľkosť červenej orientovanej úsečky.

Tri vety na záver

Úlohy, ktoré sme v našom príspevku uviedli, možno použiť viacerými spôsobmi: ako podnety na rysovanie, objavenie postupu konštrukcie, výpočet (alebo ich nepoužiť vôbec). Všetky majú jednu spoločnú vlastnosť: matematika sa tu používa na riešenie nejakého problému z reálneho sveta. Táto skutočnosť môže byť pre žiakov dôležitá: „Ľudia sa najlepšie učia, keď sa zúčastňujú činností, ktoré považujú za užitočné v reálnom živote a sú kultúrne relevantné“ (Vosniadou, 2001, s. 11).



Obr. 21: Zisťovanie smeru a rýchlosti vetra pomocou znosu pri dvoch rôznych kurzoch

Poďakovanie

Tento príspevok podporil projekt H2020 „Enhancement of research excellence in Mathematics Teacher Knowledge – MaTeK“.

Literatura

Air Navigation (1944?). Selman Field, Monroe, Louisiana: Army Air Forces Training Command Visual Training Department.

Dürer, A. (1538). *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und richtscheyt, in Linien, Ebnen und gantzen Corporen, durch Albrecht Dürer zusamen gezogen un[d] durch jn selbs (als er noch auff erden war) an vil orten gebessert, in sonderheyt mit xxii figuren gemert* [...] [Nürnberg]: [Formschneider]. ETH-Bibliothek Zürich, Rar 9104 q, https://doi.org/10.3931/e-rara-8271/ Public Domain Mark

Galilei, G. (1741). *Le operazioni del compasso geometrico e militare: con le annotazioni di Mattia Bernaggieri*. Milano: nelle stampe di Francesco Agnelli.

ETH-Bibliothek Zürich, Rar 4213. https://doi.org/10.3931/e-rara-1353/ Public Domain Mark

Garneri, A. (1921). *L'Ornato*. 3e edizione. Firenze : Mealli & Stianti. https://openlibrary.org/books/OL25401939M/L'ornato

Keith, T. (1839). *An introduction to the theory and practice of plane and spherical trigonometry*. The seventh edition. London : Longman, Orme, Brown, Green, and Longmans. https://archive.org/details/anintroductiont03keitgoog

Kubáček, Z. (2013). *Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 2. časť*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo – Mladé letá.

Kubáček, Z. (2015). *Matematika pre 1. ročník gymnázií. 2. časť*. Druhé vydanie. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá.

Kubáček, Z., Žabka, J. (2020). *Seminár z matematiky. 3. časť*. Modra: MAPA Slovakia.

Ozanam, J. (1694). *Recreations mathematiques et physiques. Tome premier*. Paris: Jean Jombert. https://archive.org/details/recreationsmathe01ozan

Simpson, T. (1800). *A treatise of algebra*. The seventh edition. London: F. Wingrave, successor to Mr. Nourse. https://archive.org/details/atreatisealgebr01simpgoog

Spanton, J. H. (1913). *Geometrical drawing and design*. London: Macmillan and Co. https://archive.org/details/geometricaldrawi00span

Spooner, H. J. (1911). *Industrial drawing and geometry*. London: Longmans, Green, and Co. https://archive.org/details/industrialdrawin00spoo

Vosniadou, S. (2001). *How childern learn*. Brussels-Geneva: International Academy of Education, International Bureau of Education. http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_07_eng.pdf

Wilczynski, E. J. (1914). *Plane trigonometry and applications*. Boston–New York–Chicago: Allyn and Bacon. https://archive.org/details/planetrigonometr00wilcrich

Zubler, L. (1607). *Fabrica et usus instrumenti chorographici. Das ist newe planimetrische Bechreibung wie man mit einem leichten und geringen Instrument alle Stäte, Gärten, Weyer und Landschafften jedes in sein gewisse Lägerstatt und Proportion auffreissen und verjüngen soll*. Basel: in Verlegung Ludwig Königs. ETH-Bibliothek Zürich, Rar 4215: 5, https://doi.org/10.3931/e-rara-1398/ Public Domain Mark