Optimalizace bez derivace

Jakub Michal

Abstrakt

S termínem derivace se žáci na střední škole obvykle setkávají teprve v posledním ročníku gymnázií, nebo dokonce vůbec. Pokud řeší optimalizační úlohy, je to většinou s využitím diferenciálního počtu. Vybaveni silným nástrojem, jaký derivace představuje, a nízkou předchozí zkušeností s řešením podobného typu úloh jinými prostředky, žáci často chápou jejich řešení pouze formálně, kdy úlohy řeší algoritmicky bez porozumění jejich struktuře a principům optimalizace. Mnoho různých teorií naznačuje, že nejlepší způsob, jak vyučovat, je následovat historický vývoj daného problému. Článek je věnován aplikaci této metody na případ řešení optimalizačních úloh s cílem ukázat některé metody řešení, které lze použít dříve, než je derivace zavedena. Experimentální využití navržených metod bylo doplněno polostrukturovanými rozhovory s žáky o použitých řešitelských metodách. Rozhovory pomohly odhalit mnoho mylných představ a miskonceptů žáků, které by jinak mohly zůstat skryty.

Klíčová slova: optimalizace, minimum funkce, maximum funkce, extrémy funkcí, historie matematiky, metody řešení optimalizačních úloh bez derivace.

Úvod

Optimalizační úlohy – tedy úlohy, kde hledáme minimum nebo maximum funkce – se zabývají otázkami vzbuzujícími zájem řešitelů a nabízejí mnohdy překvapivé odpovědi. Stejné otázky si zcela přirozeně může klást i žák základní či střední školy. Odpovědi však přicházejí většinou až v závěru gymnaziálního studia, pokud vůbec. Je to způsobeno především tím, že většina optimalizačních úloh se ve škole objeví teprve po zavedení derivací.

Náhlý příchod nového typu úloh může způsobit mnoho problémů v žákovském porozumění. Stejně tak vybavení žáka silným nástrojem, tedy derivací, bez předchozí zkušenosti s řešením tohoto typu úloh, může vést ke vzniku formálního poznání. Žáci pak často nedokáží vyřešit tyto úlohy správně a s porozuměním,

Pedagogická fakulta UK, cjakub@email.cz

protože jen následují zavedené algoritmy a nepřemýšlejí o získaných výsledcích či hlubších principech úloh.

Článek je věnován možnostem zařazení řešení optimalizačních úloh bez použití derivací do výuky matematiky na základní a střední škole. Pro nalezení vhodných úloh a jejich řešení byla provedena sonda do historie optimalizace. (Michal, 2021)

Teoretický rámec

Různé teorie zmiňují různá použití historie v didaktice matematiky. Historie může sloužit nejen jako zdroj autentických úloh, které je možné využít ve výuce, ale také k nalezení zajímavých příběhů a prostředků pro posílení motivace žáka. Stejně tak může ukázat možné vyučovací sekvence a vhodnost návaznosti učiva. (Toeplitz, 2007; Furinghetti, & Radford, 2002)

Toeplitz (2007) zmiňuje tzv. genetický přístup, který zahrnuje historický rámec ve výuce matematiky. Tento přístup použil v hodinách matematické analýzy, aby svým studentům ukázal nejen způsoby, jakými naši předkové řešili úlohy, ale také důvod, proč je vůbec řešit potřebovali. Podle Toeplitze (2007) a Furinghettiho a Radforda (2002) tento přístup vedl k lepšímu porozumění studentů probírané látce a větší motivaci k učení. Studenti na pozadí historie viděli, že se neučili probírané věty pouze pro přání učitele. Také se dozvěděli o mnoha chybách nebo nesprávných předpokladech, kterých se slavní matematici dopustili. To studenty ujistilo, že se každý může dopustit chyby, a byli dokonce hrdí, když udělali stejnou chybu, jakou udělal slavný matematik před nimi. Furinghetti a Radford (2002) také zmiňují, že ne vždy je rozumné řídit se při výuce logikou. Radí místo toho používat návaznosti učiva vycházející z historického vývoje dané problematiky. Podobný citát lze nalézt u Pólyi (1993), který také podporoval genetický přístup:

> „Přijde-li v nesprávný čas nebo na nesprávném místě, může být dobrá logika největším nepřítelem dobrého vyučování.“ (Letters, 1993, s. 286)

Podle Furinghettiho a Radforda (2002), Pólyi (1993) i Toeplitze (2007) je pro lepší pochopení a motivaci studentů/žáků nutné, aby některé z elementárnějších metod předcházely moderním metodám (v našem případě derivacím). Mnoho takových metod spolu s úlohami je popsáno v (Michal, 2021). V tomto článku se však zaměříme na dva vybrané způsoby řešení, které stojí na počátku nejen historie optimalizace, a sice na intuici a řešení pomocí fyzikálních experimentů.

Intuice

Jak tvrdí Niven (1981), nalezení nejkratší cesty nebo nejbezpečnější cesty bylo pro lidstvo zásadní již předtím, než byla vyvinuta samotná čísla. I dnes by měla intuice mít své místo v matematickém vzdělávání. O významu intuice mluví například Klein:

> „Soudím, že matematická intuice je vždy daleko napřed oproti logickému uvažování a pokrývá širší pole.“ (Letters, 1993, s. 246)

Intuice by tak měla být podle něj ve třídě upřednostňována před přísnou a rigorózní argumentací. Dále dodává, že mnoho důležitých průlomů v historii matematiky vzešlo právě z dobré intuice. První známá optimalizační úloha (problém princezny Dídó (Tikhomirov, 1986)) byla korektně vyřešena také na základě dobré intuice. V historii optimalizace se však setkáme i s případy, kdy pouhá intuice nepostačovala – jako příklad můžeme uvést domněnku Galilea, že řešením problému brachistochrony[1] je část kružnice[2] (Sanderson, & Strogatz, 2016).

Fyzikální experimenty

Mnoho matematických úloh z oblasti optimalizace bylo také řešeno pomocí paralel s fyzikálním světem. Například Heronův problém byl vyřešen pozorováním cest, po kterých se světelné paprsky pohybují (Rojo, & Bloch, 2018) a Snellův fyzikální zákon byl použit k řešení problému brachistochrony Bernoullim (Levi, 2009). Tento přístup není v dnešní době běžný, protože postrádá přesnost a obecnost. V jiných oblastech matematiky jej však používali i Archimédés, Newton, Lagrange, Poincaré nebo Riemann. Poincaré o užití fyziky dokonce říká:

> „Fyzika nám (matematikům) dává nejen příležitost k řešení problémů, ale také nám pomáhá objevit metody, jak je řešit, a dělá to dvěma způsoby: vede nás k tomu, že očekáváme výsledek, a nabízí nám vhodné cesty argumentace.“ (Letters, 1993, s. 46])

Tím dobře shrnuje některá z pozitiv tohoto přístupu ve výuce – nejen, že fyzikální demonstrace poslouží jako dobrá ilustrace jevu, umožňuje žákovi samostatné bádání a objevování, ale také mu dává do dané problematiky vhled. Pro žáka je tak snazší porozumět následnému abstraktnímu matematickému vyjádření, jelikož již bude mít představu, čeho se úloha týká, k jakému má směřovat výsledku a také mu pomůže při hledání důkazu. (Levi, 2009; Polya, 1954)

V neposlední řadě může experiment zpřístupnit žákům úlohu, která by pro ně čistě matematickými metodami mohla být zatím neřešitelná nebo nezajímavá.

[1] Křivka nejrychlejšího sestupu.

[2] Ve skutečnosti se jedná o cykloidu, jak ukázal Bernoulli.

Metodologie

Vybrané úlohy nalezené při rešerši historie optimalizace byly předmětem semistrukturovaných rozhovorů vedených se žáky základních a středních škol. Celkem bylo dotazovaných osm žáků ze základní školy a devět ze střední školy, z nichž čtyři již znali způsoby řešení optimalizačních úloh pomocí derivací. Žáci ze základní školy byli vybíráni jednak na základě jejich kladného vztahu k matematice a fyzice, jednak podle pozorování jejich dovedností během výuky uvedených předmětů. Žáci středních škol byli dobrovolníci, kteří byli ochotni se rozhovorů zúčastnit.

Délka rozhovorů se pohybovala od třiceti minut do jedné hodiny v závislosti na nápadech žáka, jeho soustředění a vůli pokračovat. Také jsem měl možnost konzultovat několik z dále popsaných úloh se žáky přímo v rámci hodin matematiky a fyziky na základní škole.

Cílem rozhovorů bylo ověřit vhodnost vybraných úloh ve výuce jak na základní, tak střední škole, prozkoumat představy žáků v oblasti optimalizace a také identifikovat obtíže, které žáci s řešením úloh nestandardními metodami mohou mít.

Úlohy byly pro rozhovory vybrány na základě dvou kritérií. Prvním byla *přiměřenost obtížnosti*, kdy zadání úlohy muselo být srozumitelné pro žáka střední, ale i základní školy. Druhým kritériem byla možnost *modelování řešení*. Toto kritérium bylo obzvlášť důležité u úloh řešených fyzikálními experimenty. Úlohy vybrané pro rozhovory je možné rozdělit do následujících, v teoretickém rámci popsaných, celků:

1. Úlohy řešené intuitivně,
2. Úlohy řešené fyzikálním experimentem.

V následujících dvou podkapitolách jsou tyto způsoby řešení stručně přiblíženy. Poté jsou představeny úlohy diskutované se žáky a některé odpovědi a postřehy z rozhovorů.

Popis úloh řešených pomocí intuice

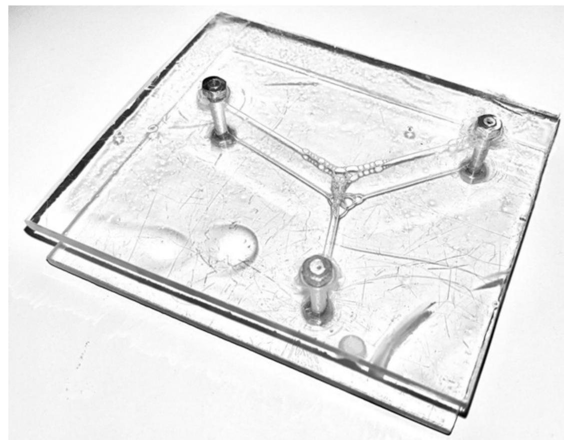
Úlohy, kde žáci měli na základě intuice nalézt řešení a svou odpověď se pokusit podpořit argumentem, byly:

1. Pomocí smyčky z provázku vymodelujte rovinný útvar maximálního obsahu.[3]
2. Pomocí smyčky z provázku vymodelujte trojúhelník a pravoúhelník maximálního obsahu.[4]

[3] Problém princezny Dídó.
[4] Další isoperimetrické úlohy.

3. Najděte dráhu (křivku), po které se kulička dostane z bodu A do bodu B za nejkratší čas.[5] Žáci měli možnost pracovat s magnetickou drahou na tabuli a pouštět po ní kuličku (viz obrázek 1), případně své návrhy črtat na papír.

Obr. 1: Magnetická dráha na tabuli



Obr. 2: Řešení pomocí mýdlových blan

Popis úloh řešených pomocí fyzikálních experimentů

Jako příklad úlohy, kdy žáci řešili matematickou úlohu pomocí fyzikálních experimentů a argumentace, zde uvedeme tzv. Steinerův problém[6] a hledání tzv. Toricelliho bodu[7]. Zvoleny byly dva přístupy:

1. První přístup je založen na experimentování s mýdlovými blanami a „snaze“ kapaliny zaujmout minimální povrch. K nalezení Toricelliho bodu a jeho vlastností je použita speciální pomůcka skládající se ze dvou průhledných obdélníkových destiček spojených třemi sloupky (viz obrázek 2). Pomůcka se ponoří do mýdlové vody a po vyjmutí se mezi destičkami a sloupky (představujícími vrcholy trojúhelníku) utvoří mýdlové blány. Při pohledu shora lze spatřit dvojrozměrnou reprezentaci nejkratší cesty s Toricelliho bodem v místě průsečíku těchto tří mýdlových blan. Můžeme také pozorovat, že úhel mezi jednotlivými blanami je 120°. (Courant, & Robbins, 1996)

2. Ve druhém přístupu jsou použita tři závaží stejné hmotnosti a tři kusy provázku libovolné délky. Provázky jsou svázány dohromady a druhý konec je

[5] Hledání brachistochrony.

[6] Problém hledání nejkratší cesty mezi třemi nekolineárními body.

[7] Toricelliho (také známý jako Fermatův) bod je bodem trojúhelníku, pro který je součet vzdáleností mezi ním a vrcholy daného trojúhelníku minimální.

připevněn k závažím (viz obrázek 3). Dále jsou potřeba tři kladky. Závaží svázaná provázky jsou zavěšena na soustavu kladek (které představují vrcholy trojúhelníku). Závaží po určité době zaujmou rovnovážný stav a zůstanou v klidu. Poloha uzlu, spojujícího všechny tři provázky dohromady, představuje polohu Toricelliho bodu. Části provázku mezi tímto bodem a kladkami zase modelují hledanou nejkratší cestu. Experiment je založen na faktu, že soustava „se snaží" zaujmout konfiguraci s minimální potenciální energií. (Levi, 2009)

Obr. 3: Řešení pomocí závaží a kladek

Výsledky a jejich diskuze

V následujících podkapitolách jsou shrnuty některé postřehy a zjištění při řešení jednotlivých úloh. Následně jsou výsledky shrnuty a porovnány s vybranou literaturou uvedenou v teoretickém rámci.

Výsledky modelování rovinného útvaru maximálního obsahu

Před samotnou prací na úkolu vytvořit útvar maximálního obsahu z dané smyčky byli žáci nejprve seznámeni s příběhem fénické princezny Dídó. Následně se měli pokusit vyřešit zadanou úlohu.

V osmi případech žáci předpokládali, že mají-li dva rovinné útvary stejný obvod, mají i stejný obsah, a považovali úkol za „chyták“. Dva středoškoláci dokonce argumentovali, proč je jejich (nesprávné) tvrzení pravdivé: „Pokud u trojúhelníku posouváme vrcholem, obsah trojúhelníku zůstává nezměněn. Takže tady to bude fungovat podobně.“ Žáci však opomněli zmínit, že tato vlastnost u trojúhelníku platí tehdy, pokud pohybují vrcholem po odpovídající rovnoběžce s protilehlou stranou (tedy nemění se výška útvaru).

Tři žáci základní školy se domnívali, že útvar s největším obsahem získají protažením smyčky do stran, jak ukazuje obrázek 4. Pouze jeden z nich tuto domněnku sám později vyvrátil, když si uvědomil, že se obrazec ve druhém rozměru (dimenzi) zmenšil. Toto řešení se u středoškoláků nevyskytlo.

Obr. 4: Natažení smyčky do stran

Většina žáků (třináct) při přemýšlení zmínila jako řešení čtverec. Přestože, jak žáci potvrdili, úlohu neznali, všichni alespoň na okamžik uvažovali, že řešení bude kruh, což je správná odpověď.

Žáci také uváděli důvody, proč zvolili kruh nebo čtverec. Tvrdili, že jsou to „pěkné útvary“. Zdůvodňovali, že obvykle jsou to právě pravidelné útvary, které jsou nositeli důležitých vlastností a bývají ve škole správnou odpovědí. Objevily se také argumenty jako: „Šipky s počátkem ve středu kruhu tlačí na provázek všude stejnou silou, ale u čtverce to neplatí. Takže to bude kruh.“ Tato odpověď již působila určitou snahou o řešení úlohy pomocí fyzikální argumentace v kombinaci s intuicí.

Dva žáci střední školy pak také správně zmínili, že útvar bude určitě konvexní. Jeden z nich dokonce načrtl hvězdu a správně na ní ukázal, že nemůže mít maximální obsah. Využil přitom shodného zobrazení.

Výsledky modelování trojúhelníku a pravoúhelníku maximálního obsahu

U úkolu týkajícího se pravoúhelníku a trojúhelníku byla situace obdobná. Žáci neřešili úlohy ve stejném pořadí. Část jich nejprve řešila úlohu pro pravoúhelník (kde pouze rozhodovali mezi obdélníkem a čtvercem) a teprve poté pro trojúhelník a druhá část v opačném pořadí. V závislosti na pořadí úloh se objevily rozdíly. První skupina měla obvykle menší problémy rozhodnout, co bude řešením, protože po vyřešení již dokázala princip přenést na trojúhelník. Osm žáků následně dokonce úlohu zobecnilo, když uvedlo, že řešením jsou vždy pravidelné mnohoúhelníky. V opačném případě žáci měli více potíží, jelikož již nerozhodovali pouze mezi čtvercem a obdélníkem, ale o druhu trojúhelníku.

Za zmínku stojí také pozorování tří žáků, kteří využili k argumentaci výsledku předchozí úlohy, když říkali: „Čtverec je blíže kruhu než trojúhelník a bude tak mít při stejném obvodu větší obsah.“ Závěr tohoto tvrzení je pravdivý a souvisí s tzv. izoperimetrickým kvocientem, ze kterého vyplývá, že: „Čím více vrcholů má pravidelný mnohoúhelník daného obvodu, tím větší je jeho obsah.“

Největší přínos práce se smyčkou byl v odhalení mylných představ a formalismů. Tyto problémy by mohly snadno zůstat skryty. Práce se smyčkou tak například ukázala, že žáci mají potíže odpovědět, zda jsou následující tvrzení pravdivá:

- Pokud mají dva rovinné útvary stejný obvod, mají stejný obsah.
- Pokud mají dva rovinné útvary stejný obsah, mají stejný obvod.

Výsledky hledání dráhy po které se kulička dostane z bodu A do bodu B za nejkratší čas

I v úloze týkající se brachistochrony bylo odhaleno několik miskoncepcí v žákovském myšlení. Pro některé bylo například obtížné spatřit rozdíl mezi případem, kdy hledají dráhu, po které je pohyb vykonán za nejkratší čas, a případem hledání dráhy, pro kterou platí, že v koncovém bodě má těleso nejvyšší rychlost. V devíti případech byla za řešení považována úsečka. Tu však většina žáků později sama dokázala vyloučit.

Žádný žák nezvolil konkávní dráhu. V sedmi případech žáci hádali, že řešením bude některá z kuželoseček, protože mají „pěkné vlastnosti“. Pět žáků si myslelo, že správná odpověď by mohla být parabola, dva žáci část elipsy a jeden žák zmínil i část hyperboly. Na žáky mělo povzbudivý efekt, když se dozvěděli, že podobné chyby se dopustil i Galileo, když také za řešení označil část kuželosečky (kružnice). Chyba se jim pak nezdála být triviální přesně tak, jak je uvedeno v (Toeplitz, 2007).

Výsledky úlohy řešené pomocí fyzikálních experimentů

U úloh týkajících se fyzikálních experimentů bylo použito více různých přístupů. V prvním přístupu byla nejprve účastníkům vysvětlena úloha, a poté byli požádáni, aby našli řešení pomocí pomůcek uvedených v popisu úlohy. Ve druhém přístupu byli žáci ponecháni, aby na úloze nejprve pracovali samostatně, bez pomůcek, a experimenty byly použity teprve poté, co měli žáci dostatek času se s úlohou seznámit a vyzkoušet různé strategie řešení. Třetí přístup byl opačný. Experimenty byly předvedeny mnou a žáci měli za úkol vysvětlit, co pokus ukazuje, a pokusit se zdůvodnit, proč to platí.

Protože žáci nebyli zvyklí s podobnými nástroji v hodinách matematiky pracovat, nebyl první z přístupů příliš efektivní. Nakonec byla proto žákům úloha ilustrována na skutečném příběhu, kdy ji ani telekomunikační společnost nevyřešila správně. To žáky ujistilo, že je v pořádku dělat chyby (opět v souladu s (Toeplitz, 2007)).

Před prací s mýdlovou vodou jsem očekával, že někteří žáci by mohli znát vlastnosti mýdlových bublin a důvod, proč mají kulovitý tvar, a rychle díky tomu pochopit, co experiment ukazuje. Také jsem očekával, že žáci budou bod, kde se protínají mýdlové blány nebo provázky, považovat za těžiště trojúhelníku, střed kružnice vepsané nebo opsané či jakýkoli jiný pro ně známý význačný bod v trojúhelníku.

První očekávání se však nenaplnilo. Pro žáky byly termíny jako povrchové napětí jen málo známy. Žáci tak skutečně pouze odhadovali a vzniklý bod označovali nejčastěji za těžiště. Při argumentaci navíc zcela abstrahovali od fyzické podstaty experimentu do světa matematických objektů a měli tak potíže s použitím fyzikálních argumentů. Proto, když se snažili obhájit svoji domněnku, nezmiňovali přítomnost závaží, kladek, ani mýdlových blan. Pokus se pro ně stal pouhým obrázkem a blány s provázky úsečkami v trojúhelníku. Na pokus se dívali jako na geometrický obrazec na papíře, přesto však nepoužívali ani geometrických vlastností k odůvodnění svých tvrzení.

Použité experimenty se tak, navzdory mým očekáváním, neukázaly jako příliš vhodné pro badatelsky orientovanou výuku. Co lze však hodnotit kladně, je fakt, že žáci po tom, kdy jsme si vysvětlili, co daný bod představuje, často sami kladli otázku: „Ale… proč to funguje?“ Žáky tak experiment motivoval k dalšímu poznávání, přesně tak, jak je zmíněno v (Toeplitz, 2007) a (Furinghetti, & Radford, 2002). Po vyjasnění také žáci reagovali, že teď je to vlastně úplně jasné, jen je to nenapadlo, a užití experimentů hodnotili kladně.

Když byli dotazovaní požádáni, aby použili intuici nebo vysvětlili fyzikální demonstraci, měli tendenci vybírat známé předměty namísto přemýšlení o situaci. Žáci byli také často ovlivněni nedávnými hodinami. Příkladem může být již zmíněný problém při zkoumání brachistochrony, kdy žáci měli potíže s rozlišením mezi nejrychlejším klesáním a nejvyšší rychlostí v koncovém bodě. To mohlo být způsobeno tím, že se právě učili o zachování energie a řešili na první pohled podobnou úlohu. Podobně žáci častěji zmiňovali kuželosečky, když se o nich právě učili.

Shrnutí výsledků

Vyučovat řešení optimalizačních úloh je v podstatné míře možné i bez znalosti derivace. V (Michal, 2021) jsou některé úlohy vhodné pro základoškolskou či středoškolskou úroveň matematiky i s řešeními uvedeny. Výsledky naznačují, že když se žák s metodami řešení seznamuje v návaznosti na historický vývoj, může získat vhled do úlohy a dosáhnout hlubšího porozumění dané problematice tak, jak je uvedeno v (Toeplitz, 2007).

V rozhovorech se ukázalo, že práce žáka s některou z elementárních metod jej může nejen motivovat k učení a poznávání (jak je uvedeno v (Levi, 2009)), ale také odhalit případné chybné představy žáků i ve zdánlivě nesouvisejících kapitolách matematiky.

Jako úlohy s potenciálním využitím ve výuce se z rozhovorů jeví být úlohy pracující s fyzikálními reprezentacemi. Mimo již uvedených přínosů lze dále zmínit i fakt, že úlohy využívají mezipředmětových vztahů, což může vést k žákovu propojení znalostí z různých oblastí. Více takových úloh, nejen z oblasti optimalizace, lze najít například v (Levi, 2009).

Závěr

Protože optimalizační úlohy byly řešeny mnoha různými způsoby dlouho předtím, než byl popsán diferenciální počet, je její historie poměrně bohatá (Niven, 1981). Žáci, kteří mají možnost sledovat tento historický vývoj optimalizace, mají možnost postupovat od nejzákladnějších metod (za kterou bychom mohli označit například intuici) přes pokročilejší (metody z oblasti elementární geometrie a geometrické nerovnosti nebo fyzikální experimenty) k moderním (derivace funkce). Tento přístup by měl jednak předejít vzniku formalismů v dané oblasti matematiky, jednak také umožnit žákům nahlédnout do principů fungování úloh. Popsané metody mají potenciál žáky motivovat a seznámit i s méně typickým přístupem k řešení matematických úloh.

Nejen úlohy tohoto typu, ale například i úlohy využívající zákonitostí chemie budou předmětem mého dalšího zkoumání.

Poděkování

Výzkum byl částečně podpořen projektem H2020 Enhancement of research excellence in mathematics teacher knowledge, akronym MaTeK, no. 951822.

Literatura

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods.* Oxford University Press

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). *Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: Rethinking phylogenesis and ontogenesis.*

Letters. (1993). *The American Mathematical Monthly*, *100*(3), s. 285–286.

Levi, M. (2009). *The mathematical mechanic: Using physical reasoning to solve problems.* Princeton University Press.

Michal, J. (2021). *Řešení optimalizačních úloh na 2. a 3. stupni školy* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Polya, G. (1954). Induction And Analogy In Mathematics: Volume I of Mathematics And Plausible Reasoning. Princeton University Press.

Rojo, A., & Bloch, A. (2018). *The principle of least action: history and physics.* CAMBRIDGE University Press.

Sanderson, G., & Strogatz, S., [3Blue1Brown]. (2016). *The Brachistochrone, with Steven Strogatz* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU

Toeplitz, O. (2007). *The calculus: A genetic approach.* Chicago: The University of Chicago Press.

Tikhomirov, V. M. (1986). *Stories about maxima and minima.* American Mathematical Society.