

Argumentačné úlohy na druhom stupni základných škôl

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ¹, JARMILA NOVOTNÁ²

V príspevku je predstavený pohľad na dve vybrané učebnice matematiky, jednu z Českej republiky a jednu zo Slovenska z dvoch perspektív. Prvou perspektívou je spôsob sprístupnenia nového učiva, druhou je typ (prevažujúcej) argumentácie, či už prezentovaný, alebo na základe filozofie učebnice očakávaný.

Úvod

Argumentácia a dôvodenie je jednou zo základných charakteristík matematiky. Podľa NRICH (2014) je argumentácia „lepidlo“, ktoré pomáha matematike dávať zmysel. Jeannotte & Kieran (2017, s. 9) charakterizujú argumentáciu ako „proces komunikácie s ostatnými alebo so sebou samým, ktorý umožňuje odvodzovať matematické výroky z iných matematických výrokov“. Ako uvádzajú kurikulárne dokumenty v Českej republike (RVP) a na Slovensku (ŠVP), žiaci by na hodinách matematiky mali argumentovať, komunikovať a spolupracovať v skupine pri riešení problémov... spracovávať informácie vrátane samostatnej práce s učebnicou a ďalšími textami... spoznajú matematiku ako súčasť ľudskej kultúry. Vhodne podporenou argumentáciou možno zvýšiť porozumenie žiakov, prirodzene motivovať k ďalšiemu bádaniu a podpore verbálnej komunikácie (najmä pri formulovaní záverov a argumentovaní ich správnosti).

Argument nemusí byť len slovný, má viaceré podoby. Môže byť grafický (napr. vysvetľujúci obrázok, schéma, diagram, graf, tabuľka), symbolický (napr. algebrický, alebo číselný výraz), možno pri ňou využiť analógiu so situáciou, v ktorej sme si istí o fungovaní, alebo pripodobnení matematickej situácie k situácii z (reálneho) sveta (napr. pomerne známe „priateľ môjho nepriateľa je môj nepriateľ“, preto kladné krát záporné bude záporné číslo).

Pre skúmanie učebníc z dvoch perspektív sme si zvolili Matematiku s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy (Novotná a kol., 1997) a Matematiku pre 7. ročník ZŠ (Šedivý a kol., 2003). Ukážky sú z tematického celku Osová a stredová súmernosť. V príspevku nie je ukázná analýza všetkých príkladov, úloh a cvičení. Zameriame sa na vybrané časti s cieľom ukázať pestrú paletu prístupov a možností rozvoja argumentácie (aj keď na prvý pohľad možno nie zjavnej).

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; slavickova@fmph.uniba.sk

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Analytický rámec

Pri prvej perspektíve zameranej na sprístupnenie učiva sme sa zamerali na sledovanie charakteristík stručne opísaných v tabuľke 1.

Tabuľka 1: Sledované charakteristiky postupov v učebniciach

Čo sme sledovali	Stručná charakteristika
Narhnutie a spracovanie informácii	Návrh má podať žiak, učiteľ, alebo je podaný učebnicou?
Vykonávanie inštrukcii	Inštrukcie v úlohe sú rovno v učebnici spracované, má ich spracovať žiak?
Zavedenie novej terminológie	Kedy a ako sa nová terminológia zavádza?
Požitie novej terminológie	V akom kontexte sa nová terminológia používa? Kto s ňou pracuje?
Odvolať sa na predchádzajúce znalosti	Či už z nového celku alebo niektorého zo starších
Manipulácia	Či je pri riešení potrebná manipulácia, ak áno, akého typu (skladanie, prekreslenie, odmeranie, skopírovanie, ...)

Pri pohľade na typ argumentu sme vychádzali z kategorizácie od Sevinc a kol. (2022), ktorých kategórie sú vhodné práve na analýzu úloh v učebniciach matematiky z pohľadu argumentácie a dôvodovania. Autori analytického rámca predstavujú 7 hlavných kategórii pre argumenty, ktoré používajú autori vybraných učebníc v piatich krajinách zapojených do projektu MaTeK (viac informácií na projectmatek.eu). Tieto uvádzame v tabuľke 2.

Ukážka č. 1: Matematika s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy (Novotná a kol., 1997)

Začneme prvou perspektívou, t.j., spôsobom sprístupnenia učiva. Skúste si zodpovedať na nasledovné otázky: Skúste si zodpovedať na nasledovné otázky: Kto je aktívny? (učiteľ/žiak/...?) Ponúka zadanie priestor pre objavovanie, skúmanie, manipuláciu (či už fyzickú, alebo mentálnu)? Majú v úlohe žiaci tvoriť vlastné závery? Vyžaduje úloha od žiakov aby argumentovali? Kam podľa vás úloha smeruje?

V úlohe je aktívny žiak, inštrukcie sú podávané učebnicou (žiak nemá vymyslieť nové inštrukcie), žiak aktívnou manipuláciou má objaviť nový poznatok,

Tabuľka 2: Charakteristika argumentov v učebniciach podľa Sevinc a kol. (2022, s. 2085)

Typ argumentu	Krátka charakteristika
1 Odvolanie sa na autoritu	Bez odôvodnenia, napr. v Euklidových základoch, v učebnici, a pod.
2 Jednoduchá (1-kroková) dedukcia	Jednoduchá dedukcia z jedného, alebo viacerých predpokladov
3 Matematizácia (s odôvodnením krokov)	Vysvetlenie dekontextualizácie problému definovaného v reálnom svete
4 Využitie analógie	Vytvorenie záveru na základe podobnosti medzi dvoma prípadmi (jeden pochopený, dobre známy, druhý menej pochopený)
5 Empirický argument / špecifický prípad a Tvorba tvrdenia a zovšeobecnenie b Overenie tvrdenia	Od konkrétneho k zovšeobecneniu, testovanie tvrdení pomocou príkladov priamo meraných veličín
6 Tvorba záveru / overenie / zamietnutie využitím dedukcie a Generický príklad b Kontrapríklad c Systematická enumerácia d Iné	Záveru zo známych predpokladov využitím formálnych logických pravidiel
7 Iné	Napr. abduktívne

ktorý na základe empirickej skúsenosti má zovšeobecniť. Argumentácia je (by mala byť) prítomná počas celého priebehu aktivity, najbadateľnejšia je v bode c), kde má žiak zovšeobecniť svoje pozorovania. Úloha smeruje k osovej súmernosti a nájdeniu osi súmernosti (viď obrázok 2).

Ukážka druhá: Matematika pre 8. ročník ZŠ (Šedivý a kol., 2003)

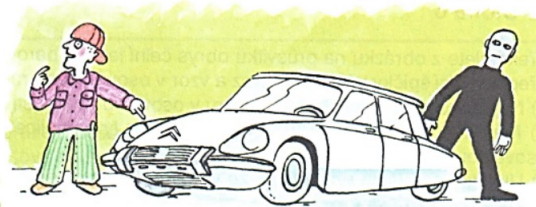
Spôsob zavedenia nového poznatku je deduktívny, t.j. autori zdefinujú čo osová, resp. stredová súmernosť je, ako nájdeme osovo, resp. stredovo, súmerné body, úsečky a následne prichádzajú úlohy ako si rozoberieme práve z pohľadu typu argumentu o niečo podrobnejšie. Predtým si však skúste zodpovedať na nasledovné otázky:

Kryšpín bádala nad obrázkem značky Citroënu dál. Mezi jiným zjistil, že ke zhotovení této značky stačí sestrojít (vystřihnout, vyříznout, vypilovat) jenom jednu šipku. Například dolní šipku získáme tak, že horní opatrně **posuneme** tak, že její vrchol se stále pohybuje po ose souměrnosti a ramena jsou během posunutí rovnoběžná.

a) Na obrázku z časopisu pro motoristy (nebo ve skutečnosti se souhlasem majitele auta) změřte úhlooměrem úhel, který svírají ramena šipky ve značce auta Citroën, a měřítkem změřte délku ramen.

b) Narýsujte tuto šipku ve skutečné velikosti na volný list papíru. Sestrojte osu úhlu svírajícího ramena šipky. Osa úhlu je zároveň osou souměrnosti ramen šipky. Vyznačte ji čerchovaně červeně.

c) Překreslete šipku na průsvítku, vystřihněte ji a zopakujte Kryšpínův pokus. Co bude značit **délku posunutí**?



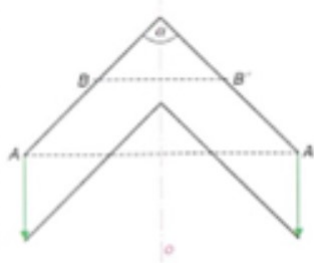
Obrázok 1: Úloha na symetrie (Novotná a kol., 1997, s. 42)

Kryšpín zjistil i další zajímavosti: Přehnutím papíru s obrázkem značky Citroënu podle osy o se zobrazí bod A na bod A' a bod B na



bod B' . Kryjí se (a proti světlu ztotožní) i úsečky AB a $A'B'$. Přímka určená body A, B se zobrazí na přímku určenou body A', B' . Obě se přitom protnou v bodu souměrnosti.

Obrazem úsečky AB v osové souměrnosti s osou o je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB . Obrazem přímky p v osové souměrnosti s osou o je přímka p' , pro kterou platí:
a) jestliže $p \perp o$, pak $p = p'$,
b) jestliže $p \parallel o$, pak $p' \parallel o$ (vzdálenosti p od o a p' od o se rovnají),
c) jestliže $p \nparallel o$, pak průsečík p s osou o je samodružný bod (velikosti úhlů, které svírají p s osou o a p' s osou o se rovnají).

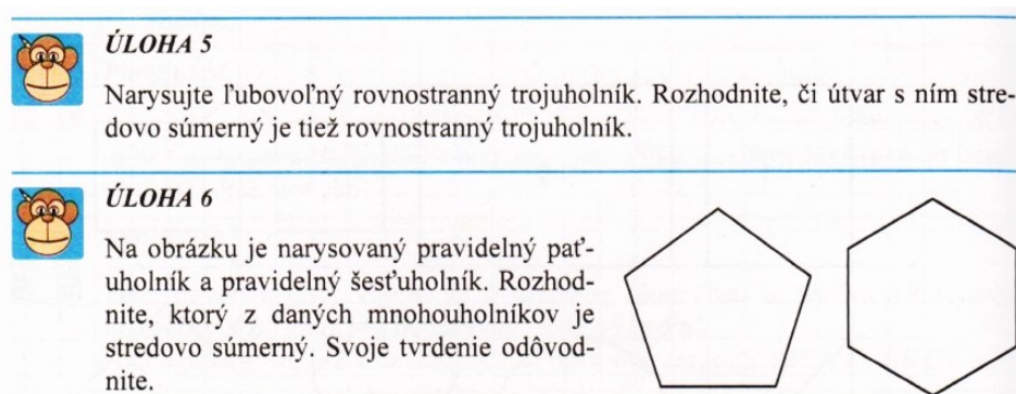


Obrázok 2: Pokračovanie úlohy (Novotná a kol., 1997, s. 43)

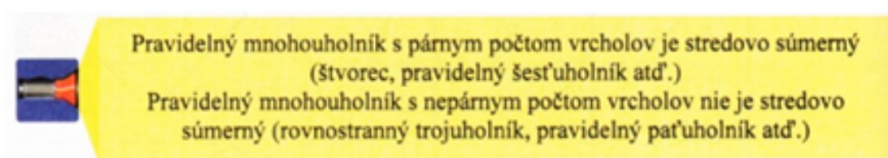
Aký typ argumentu by ste očakávali pri riešení nasledovných úloh (viď obrázok 3)? Aký by podľa Vás poskytli Vaši žiaci? Čo mohlo byť zámerom autorov, keď tieto úlohy zaradili? Zaradili by ste tieto úlohy na hodinu matematiky? Ak áno, kedy? Čo by ste nimi sledovali? Aká úloha žiaka, Vás? Ak nie, prečo? Zvažovali by ste úpravu zadania? S akým cieľom?

V úlohe 6 autori priamo nabádajú k odôvodneniu riešenia. Vzhľadom na to, že po úlohe 6 nasleduje zovšeobecnenie (viď obrázok 4), úlohu by mal zadať učiteľ (t.j. nemal by dať žiakom samostatnú prácu s učebnicou pri riešení úlohy 5 a 6) a viesť vhodne zvolenými otázkami ku zovšeobecneniu.

Túto úlohu možno charakterizovať v zmysle predstaveného analytického rámca ako 5a, t.j. žiaci skúmaním niekoľkých konkrétnych prípadov využitím empirického argumentu sformulujú tvrdenie a zovšeobecnia.



Obrázok 3: Zadanie úloh podporujúcich skúmanie a argumentáciu (Šedivý a kol., 2003, s. 88)



Obrázok 4: Želaný výsledok prezentovaný učebnicou (Šedivý a kol., 2003, s. 88)

Záver

Ako ukazuje výskum Cakiroglu a kol. (2023), učebnica je najpopulárnejším zdrojom námetov na prácu na hodine matematiky, ale aj na prácu priamo na vyučovaní. Učiteľ vyberá učebnicu, úlohy ktoré bude so žiakmi riešiť a tiež spôsob práce v triede. Tým ovplyvňuje prostredie, v ktorom žiaci pracujú a tiež charakter a množstvo argumentácie, ktorú po žiakoch bude vyžadovať, resp. priamo vyplynie z práce. Je preto dôležité, aby učiteľ vedel, aký typ argumentácia bude od žiakov vyžadovať. K tomu by mu mal pomôcť obsah a spracovanie učebnej látky v učebnici, ktorú použije. K tomu potrebuje mať k dispozícii nástroj pre tento výber. A práve v tom vidíme prínos pracovnej dielne a jej stručného

Literatúra

- [1] CAKIROGLU, E., KOHANOVÁ, I., İŞLER-BAYKAL, I., SLAVÍČKOVÁ, M., DI PAOLA, B., MICHAL, J., & HØYNES, S. M. (2023). *Mathematics teachers' uses of resources in the context of teaching reasoning-and-proving: Insights from a cross-national study*. CERME 13 [zatiaľ nepublikované]
- [2] JEANNOTTE, D., & KIERAN, C. A. (2017). Conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 96, 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>

- [3] NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V., HANKOVÁ, J., & SINKOVÁ, M. (1997). *Matematika s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy*. Scientia.
- [4] SEVINC, S., KOHANOVÁ, I., ISIKSAL-BOSTAN, M., KUBÁČEK, Z., ISLER-BAYKAL, I., LADA, M., CAKIROGLU, E., & DI PAOLA, B. (2022). Developing an integrated framework for analyzing ways of reasoning in mathematics. *ICERI2022 Proceedings* (s. 2082–2089). <https://dx.doi.org/10.21125/iceri.2022.0529>
- [5] ŠEDIVÝ, O., ČERETKOVÁ, S., MALPEROVÁ, M., & BÁLINT, Ľ. (2003). *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť*. SPN Bratislava
- [6] THE NRICH PRIMARY TEAM (2014). *Reasoning: Identifying opportunities*. University of Cambridge, NRICH. <https://nrich.maths.org/10990>

PodĎakovanie

Tento príspevok vznikol v rámci európskeho projektu H2020 MaTeK, č. 951822.