

# VE KTERÝCH OBLASTECH MATEMATIKY UČITELÉ ZAŘAZUJÍ ÚLOHY NA ARGUMENTACI A DOKAZOVÁNÍ

Jakub Michal, Jarmila Novotná, Mária Slavíčková

## Abstrakt

*Dnešní doba bývá nazývána dobou post-faktickou, kdy dochází k mazání rozdílu mezi pravdou a nepravdou. Potřeba ověřovat si informace, kriticky o nich přemýšlet a správně argumentovat je proto větší než kdy dříve. Jedním z cílů matematiky je rozvíjet tyto schopnosti. V mezinárodním průzkumu jsme zjišťovali, ve kterých oblastech matematiky učitelé zařazují úlohy na zdůvodňování a dokazování nejvíce a ve kterých nejméně. Také nás zajímalo, co pro ně pojmy argumentace a důkaz ve vyučování matematice znamenají.*

## 1 ÚVOD

Jedním z cílů výuky matematiky je zvýšit kompetence žáka v oblasti argumentace. Této dovednosti se žák učí především skrytě, a to v průběhu celé školní docházky. Schopnost správně argumentovat a kriticky přemýšlet se neuplatňuje jen v dalším studiu matematiky a jiných vědních oborů, ale i v běžném životě. Při množství informací, které v současné době dostáváme, je schopnost ověřit si jejich pravdivost a posoudit jejich význam potřebná mnohem více, než tomu bylo kdy dříve. Ač některá témata školské matematiky nabízejí úlohy, které jsou s argumentací pevně spjaty, u jiných je potřeba argumentační potenciál úloh objevit a učitelem následně vhodně využít. Jaká témata jsou těmi, kde učitelé nejčastěji argumentační a důkazové úlohy na základní a střední škole zařazují? Je výčet těchto témat závislý na kultuře, národním kurikulu (RVP, ...), nebo je univerzální a tato témata jsou vstupem žáků k argumentaci a dokazování z jiného důvodu? Vidí učitelé dokazování a argumentaci jako důležitou část kurikula a co pro ně vůbec dané pojmy ve vyučování znamenají? Nejen na tyto otázky, týkající se tématu argumentačních a důkazových úloh, hledáme odpovědi v rámci Horizon 2020 projektu *Enhancement of Research Excellence in Mathematics Teacher Knowledge*, akronym MaTeK.

## 2 MEZINÁRODNÍ PRŮZKUM

Abychom našli odpovědi na tyto i mnohé další otázky týkající se argumentace a zdůvodňování na základních a středních školách, provedli jsme v rámci projektu MaTeK, do kterého jsou zapojeny univerzity ze Slovenska, České republiky, Itálie, Norska a Turecka, dotazníkový průzkum. Ten byl vytvořen v angličtině a do jeho tvorby byly zapojeny všechny zúčastněné země tak, aby otázky byly v každém školském systému smysluplné a aby bylo možné výsledky porovnávat. Následně byl dotazník přeložen do jednotlivých jazyků, přičemž překlad prošel vícenásobnou křížovou kontrolou. Dotazník obsahoval mimo jiné otázku týkající se okruhu témat, do kterého učitelé zařazují argumentaci a dokazování. Respondenti také uváděli, jak často takové úlohy do daného tématu zařazují.

### 2.1 STRUKTURA OTÁZEK

Dotazník byl tvořen 29 položkami. V tomto výzkumu jsme se soustředili na tři položky, které se týkají argumentace v průběhu vyučovací hodiny, z nichž jedna byla otevřená a zjišťovala učitelské pojetí a představy o argumentaci. Učitelé také uváděli příklad argumentace nebo dokazování, který ve třídě používají.

Uzavřená dvojice otázek se týkala oblastí, do kterých učitelé argumentaci nebo dokazování zařazují. Protože kurikula různých zemí se liší, bylo nutné nalézt takový průnik oblastí, které se vyučují ve všech zemích. Proto jsme nakonec zůstali u obecného rozdělení na tyto oblasti: *Geometrie, Aritmetika, Algebra, Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika, Funkce*.

Poté, co respondent uvedl, které oblasti jsou pro jeho výuku relevantní, zvolil u každé z oblastí, kterou vyučuje, frekvenci zařazování aktivit zaměřených na zdůvodňování nebo dokazování ve svých hodinách matematiky. Frekvenci učitel volil na čtyřstupňové Likertově škále s možnostmi *vůbec, občas, obvykle* a *vždy*.

### 2.2 PILOTNÍ PRŮZKUM

V testovací fázi byl dotazník šířen přes skupiny pro učitele matematiky na sociálních sítích. Dotazník byl otevřený pro příjem odpovědí dva týdny. Za tuto dobu jsme získali odpovědi od 15 slovenských, 21 českých, 33 italských, 20 norských a 22 tureckých učitelů.

Frekvence používání úloh zaměřených na zdůvodňování a argumentaci byla převedena na číselnou hodnotu 0 až 3, kde 0 značí *nikdy* a 3 odpovídá *vždy*. Poté byl spočítán vážený průměr tak, aby bylo možné srovnávat hodnoty mezi oblastmi matematiky i zeměmi. Tyto průměry zachycuje tabulka 1. V tabulce jsou také tučně zvýrazněny nejvyšší průměry, které reprezentují oblast, ve které dotazování učitelé z dané země nejvíce zařazují úlohy na argumentaci a dokazování. Kurzívou jsou naopak zvýrazněny oblasti s nejnižším průměrem.

Tabulka 1: Frekvence zařazování zdůvodňování do jednotlivých témat se zvýrazněnými extrémy

	Geometrie	Aritmetika	Algebra	Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	Funkce
Slovensko	1,60	1,67	<b>1,93</b>	<i>1,43</i>	1,73
Česká republika	<b>1,85</b>	1,76	1,63	<i>1,15</i>	1,23
Itálie	<b>2,78</b>	2,56	2,52	<i>2,41</i>	2,66
Norsko	1,80	1,85	<b>1,90</b>	1,80	<i>1,32</i>
Turecko	<b>2,14</b>	2,10	1,95	1,86	<i>1,39</i>

Ve všech pěti zemích učitelé volili za oblast s nejvyšší koncentrací úloh na zdůvodňování a důkazy jednu ze dvou oblastí – *Geometrie* nebo *Algebra*, což je v souladu s očekáváním, neboť historicky se první důkazy objevily právě v oblasti geometrie, jejíž výuka vychází z Eukleidovské tradice (300 př. n. l.). [1] Naopak nejméně často dotázaní učitelé se žáky zdůvodňují a dokazují v oblasti *Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika* (tato oblast je na posledním místě dokonce ve třech zemích – Slovensku, České republice a Itálii) a oblasti *Funkce* (Norsku a Turecku). Důvodem pro nižší zastoupení argumentace a dokazování v této oblasti může být jednak to, že oblast není explicitně tolik vizuální, ale také její výrazně nižší zastoupení v kurikulu ve srovnání například s geometrií. Přestože podobně by šlo argumentovat i v oblasti algebry, na rozdíl od statistiky se u ní v praxi velmi často abstraktní vztahy převádějí na vztahy geometrické, a tedy často argumentace v algebře znamená převedení na argumentaci v geometrii, kde je pro žáky zdůvodňování na základě uvedených odpovědí v otevřených položkách dotazníku nejpřirozenější.

Odpovědi, které učitelé uváděli jako příklad argumentace, byly ve většině případů také geometrické (Pythagorova věta, Eukleidovy věty, ...), vzácně z oblasti algebry (výpočet kořenů kvadratické rovnice).

Učitelé ze zkoumaného vzorku si uvědomují důležitost argumentace a dokazování ve vyučování matematice: „nie je to náboženstvo...“. Objevily se ale i odlišné názory, které vyjadřují spíše odmítavý postoj k argumentaci a dokazování: „Často zdržení v hodině... , vzhledem k množství učiva to nestíhám.“ Jiní učitelé zase věří, že oblast je vhodná spíše jen pro nadané žáky: „Pro nadanější žáky je to vln do matematiky.“ Stejný přístup učitelů k argumentaci a dokazování zmiňuje také Knuth [2]. Ten také hovoří o silné potřebě učitelů kontrolovat si správnost dokázaného tvrzení empirickým způsobem. I v našem vzorku se objevili učitelé, kteří zmiňují empirické dokazování a někteří jej považují za adekvátní způsob zdůvodnění: „Ověření si, že vzorec platí, na konkrétním příkladu.“

Představy učitelů o formě argumentace ve třídě se též velmi odlišují. Někteří považují za důležité, aby oni sami podali argument pro použití nebo platnost: „Vysvetliť žiakom aj podstatu, prečo sa to tak používa, nielen fráza, lebo to tak je.“ Jiní, v souladu s Mason [3] argumentaci považují za kolektivní aktivitu: „Žiakom nepredkladáme len hotové tvrdenia, snažíme sa ich spoločne odvodiť, dokázať.“

### 3 ZÁVĚR

Z předběžných výsledků lze vypožorovat několik trendů. Údaje získané od italských učitelů ukazují, že učitelé zařazují argumentaci a důkazy stejnou měrou nezávisle na tématu. To může být způsobeno jak větší časovou dotací vyhrazenou pro hodiny matematiky, tak typem učebnic. Ty mají spíše charakter vysokoškolských učebnic. V datech se objevil také překvapivý výsledek – přestože jsme předpokládali podobné výsledky ve Slovenské republice a České republice (např. [4]), náš aktuální průzkum to nepotvrzuje (až na oblast, v níž učitelé argumentují a dokazují nejméně: kombinatorika, pravděpodobnost a statistika). To však může být způsobeno i malým vzorkem z pilotního testování. V současné době zpracováváme výsledky z hlavního testování, jehož se zúčastnilo více učitelů. Norsko a Turecko nejméně často zařazují argumentaci a zdůvodňování do tematického celku Funkce. Názory na argumentaci a zdůvodňování se mezi učiteli v praxi liší a zahrnují celou škálu od *žádná argumentace* až po *rigorózní deduktivní důkaz*. Hlubší vhled do problematiky by přinesly rozhovory, které také plánujeme s učiteli zapojených zemí provést.

### PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl v rámci projektu H2020 *Enhancement of research excellence in mathematics teacher knowledge*, MaTeK, no. 951822.

### LITERATURA

- [1] DAVIS, P. J., HERSH, R. *The mathematical experience*. Houghton Mifflin Company, 1981.
- [2] KNUTH, E. J. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2002, 5, 61–88.
- [3] MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. *Thinking mathematically* (2nd). Pearson Education Limited, 2010.

- [4] SLAVÍČKOVÁ, M., NOVOTNÁ, J. Analysis of prospective mathematics teachers' lesson plans. In J. Fejfar, et al. (Eds.), *Proceedings of the 19th international conference Efficiency and Responsibility in Education 2019 (ERIE)*, p. 143–149. Czech University of Life Sciences, Faculty of Economics and Management, 2022.