ROZVÍJANIE ARGUMENTAČNEJ ÚROVNE ŽIAKOV

Mária Slavíčková

ABSTRAKT

Schopnosť argumentovať, nielen v matematike, sa v dnešnej dobe ukazuje ako dôležitá kompetencia. Argument odvolaním sa na autoritu môže v niektorých situáciách stačiť, ale sú situácie, najmä v matematike, kedy odpoveď „lebo je to v učebnici" nie je postačujúca, resp. by postačujúca byť nemala. V príspevku sa preto zameriame práve na aktivity podporujúce hlavné argumentačné módy, ktoré možno identifikovať vo vybraných slovenských učebniciach pre základné školy, resp. úlohách určených pre žiakov druhého stupňa ZŠ.

KLÍČOVÁ SLOVA: argumentácia, dôvodenie, úlohy vedúce k argumentácii, diskusia v triede.

ÚVOD

Argumentácia je v matematike všade prítomná, možno ju identifikovať vo všetkých jej oblastiach. Určite by sme sa jej nemali venovať len pri tematickej časti Logika, dôvodenie a dôkazy. Našou úlohou by mal byť jej dostatočný rozvoj u našich žiakov.

K rozvoju argumentácie nás zaväzuje aj Štátny vzdelávací program (ďalej ako iŠVP), kde pričom podľa iŠVP (ŠPÚ, 2016, s. 3) žiaci majú na hodinách argumentovať, komunikovať a spolupracovať v skupine pri riešení problémov. Samozrejme, iŠVP identifikuje viaceré oblasti, ktoré na matematike máme rozvíjať, my sa však zameriame práve na argumentáciu a komunikáciu v triede.

Úlohami, ktoré sú čisto procedurálnymi (typu vypočítajte) sa argumentačná úroveň žiakov len ťažko bude rozvíjať. Preto sa v ďalšom texte zameriame nielen na argumentačné módy tak, ako sú identifikované v odbornej literatúre, ale aj na úlohy, ktoré k argumentácii a diskusii v triede majú šancu viesť. Ukážeme si, ako s nimi možno jednoducho pracovať na zvyšovaní argumentačnej úrovne žiakov.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, slavickova@fmph.uniba.sk

Argument a argumentácia

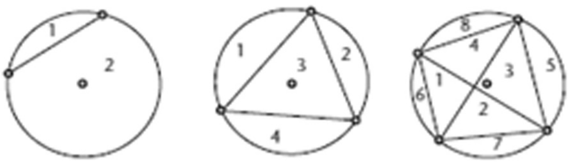
Argument definuje Toulmin (1958/2003) ako nástroj, vďaka ktorému z počiatočných dát využitím legitímnych krokov prichádzame k tvrdeniu. Tieto legitímne kroky možno zabezpečiť napr. opretím sa o platné tvrdenia, ďalej možno identifikovať množinu, pre ktorú tvrdenie bude platiť, resp. identifikovať tie prvky, ktoré platnosť tvrdenia popierajú.

Freeman (2005) identifikuje 4 módy argumentácie:

- a priori mód, kedy sa opierame o intuíciu,
- empirický mód, keď o pravdivosti tvrdenia rozhodujeme na základe skúseností,
- inštitucionálny mód, ako argument použijeme známe tvrdenia, opierame sa o platné vzťahy a pod.,
- hodnotiaci mód, keď argumenty logicky usporiadame a vytvoríme dôkaz tvrdenia.

Argument, ktorý poskytneme, môže mať viaceré funkcie. Môžeme pomocou neho vyargumentovať platnosť tvrdenia (ukážeme, že funguje ale nemusíme vedieť, prečo), môžeme vďaka nemu pochopiť, prečo tvrdenie funguje (Hanna, 1990), systematizáciou argumentom sa môžeme dopracovať k dôkazu (de Villiers, 1990), môže podporiť komunikáciu v skupine (Knuth, 2002).

Z pohľadu zvoleného prístupu, či od konkrétneho k všeobecnému, alebo naopak, rozlišujeme dve základné formy argumentu: induktívny a deduktívny. Pri *induktívnom argumente* vychádzame z konkrétnych pozorovaní a vyslovuje hypotézu. Aj keď naše pozorovania sú korektné, hypotéza ešte nemusí byť platná. Typickým príkladom induktívneho myslenia a smerovaniu k nesprávnemu záveru je úloha o počte oblastí v kruhu, na ktoré ho delia tetivy tvoriace n-uholník aj s tetivami (viď obr. 1)



Obr. 1: Počet oblastí, na ktoré možno kruh rozdeliť

Z prvých troch obrázkov nám vychádza, že pôjde o mocniny dvojky. Toto však platí len ak je počet bodov na kružnici menší ako 5. Pre vpísaný päťuholník s uhlopriečkami je počet oblastí 31, nie 32.

Na druhú stranu, *deduktívny argument* sa opiera o všeobecne známe tvrdenia (vety, definície, vzťahy, a pod.) a ukazuje platnosť (resp. neplatnosť) nášho konkrétneho tvrdenia. V tomto prípade, pokiaľ sú platné premisy, záver musí byť platný.

Forma argumentu môže byť tiež rôzna, pre naše potreby budeme rozlišovať, či argument je podložený obrázkom (či už špecifickým, alebo všeobecným), alebo využíva algebraické vyjadrenia (či už konkrétne, alebo všeobecné), alebo používa analógiu (či už zo školského prostredia, vlastných skúseností a pod.)

Pre nás bude dôležitá ako komunikácia, tak vnesenie pochopenia, prečo dané tvrdenie platí, alebo neplatí.

Úlohy zo slovenských učebníc

Pre nasledujúce úlohy si skúste rozmyslieť:

- či ide o zadanie, ktoré vyžaduje argumentáciu žiaka,
- ako by ste s pracovali na hodine s týmto zadaním,
- čo by ste uznali za hodnoverný argument, ak si ho riešenie vyžaduje,
- aký argument by ste neuznali a prečo.

Úloha 1. Igorova hádanka (prebrané zo Šedivý a kol., 2008, s. 15)

O osem rokov bude mať môj strýko dvakrát toľko rokov, ako mal pred dvanástimi rokmi. Rozhodnite, ktorá z nasledujúcich rovníc správne vyjadruje počet rokov, ktoré má Igorov strýko dnes.

A $x - 12 = 2(x + 8)$ **B** $2(x - 12) = x + 8$ **C** $2x + 24 = x + 8$
D $2x - 12 = x - 8$ **E** ani jedna z rovníc nie je správna

Šedivý a kol. (2008, s. 15)

Úloha 2. Milanova séria (prebrané zo Žabka a Černek, 2012, s. 6)

Milanovo riešenie:

~~5, 5, 10~~ 6, 6, 10 7, 7, 10 8, 8, 10 9, 9, 10 10, 10, 10

To je 5 možností. Trojuholník so stranami 10, 10, 10 je rovnostranný, ale je vlastne aj rovnoramenný.

10, 10, 10 10, 10, 9 10, 10, 8 ... 10, 10, 1

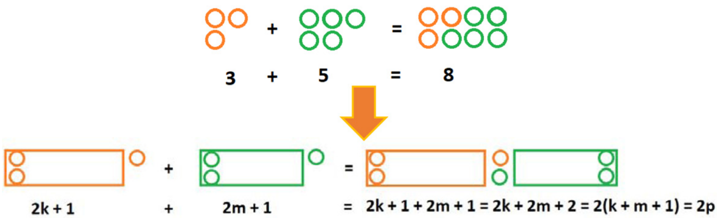
To je 10 možností.
Výsledný počet je 10 + 5 = 15

Úloha 2 ponúka hneď niekoľko momentov, pri ktorých treba diskutovať a argumentovať. Hneď prvým je ujasnenie si zadanie. Ak sa v zadaní píše „má najdlhšiu stranu dlhú 10 cm“ či môže byť aj viac takýchto strán (dve, alebo aj všetky tri). V odpovedi na prečiarknutú možnosť 5, 5, 10 je očakávaná trojuholníková nerovnosť. Argument môže byť pomenovaním vlastnosti, alebo jej vysvetlením, prečo sa trojuholník s dĺžkami strán 5, 5, 10 nedá zostrojiť. Nájdenie chyby v Milanovom riešení (t.j. všimnutie si dvakrát započítanej trojice dĺžok rovnostranného trojuholníka) pôsobí pomerne zjavne (najmä vzhľadom na prehľadnosť zápisu v učebnici), možno tu ale počítať aj s konfrontáciou s vlastnými riešeniami.

Potenciál pre argumentovanie v oboch úlohách je asi zjavný. Kým v prvej identifikujeme argumentáciu výpočtom a vysvetlením platnosti použitého vzťahu/rovnice, v druhej vidno o niečo širšiu paletu prístupov. Už len samotné zadanie vedie k diskusii a tým pádom aj argumentácia má svoje zastúpenie.

Úlohy nemusíme riešiť presne tak, ako ich zadáva učebnica, niekedy pomôže preformulovanie, alebo zaradenie aktivít tak, aby naši žiaci boli schopní úlohu uchopiť. Ak už poznajú terén, na ktorom sa pohybujú, ľahšie sa im zaujme stanovisko.

Úloha 3. Zistite, či súčet dvoch nepárnych čísel je vždy párne číslo.



Obr. 2: rôzne módy argumentácie

Riešenie môže prechádzať od obrázkového konkrétneho k obrázkovému všeobecnému a tiež algebraickému riešeniu. Tieto vyjadrenia sa môžu prelínať a jedno môže pomôcť k ustáleniu druhého.

V úlohe 3 nemusíme zadanie prebrať tak, ako je uvedené. Úlohu možno preformulovať na otvorenú, kedy budeme zisťovať, ako to je s paritou súčtu dvoch nepárnych čísel. Môžeme k tomu prísť najskôr skúšaním niekoľkých súčtov a až potom sa opýtať, či to platí vždy.

Úloha 4. Je pravda, že v ľubovoľnom trojuholníku platí, že súčet vnútorných uhlov je $180°$?

Aj keď je zjavné, že odpoveď môže byť len typu áno/nie, myslím, že sa málokterý učiteľ s takou odpoveďou uspokojí a bude nasledovať otázka typu „Prečo?“ Otázka na podporu argumentácia má zmysel najmä ak sa žiaci ešte nestretli s tvrdením o súčte vnútorných uhlov trojuholníka. Vie byť dobrou motivačnou úlohou podporujúcou aj skúmanie, či to platí pre všetky trojuholníky a ako by sme to mohli odôvodniť.

Ako by ste preformulovali úloh 4? Prípadne, aké úvodné aktivity by ste robili skôr, ako by ste sa pokúsili o vyargumentovanie platnosti tvrdenia? K akému typu argumentu by ste sa radi s Vašou triedou dostali?

Ďalšie úlohy na použitie v triede

Uvádzame niekoľko úloh, ktoré možno použiť na druhom stupni ZŠ podporujúce rozvoj argumentácie a pre nás poskytujúce výbornú spätnú väzbu o chápaní jednotlivých konceptov. Pre každú u nich skúste nájsť čo najpestrejšiu paletu módov argumentácie.

Úloha 5. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:

a) Ak a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, potom platí $a + b \geqq c$.

b) Päťuholník má menej pravých uhlov ako štvorec.

c) Keď „odstrihneme“ časť z rovinného útvaru, zmenšíme tým jeho obsah aj obvod.

d) Ak pripočítame rovnaké číslo k čitateľu a menovateľu zlomku, potom sa hodnota zlomku zväčší.

e) Ak sa cena zníži o 20 % a potom sa opäť zvýši o 20 %, v podstate sa cena nezmenila.

V časti a) nás zaujíma, či rozumejú trojuholníkovej nerovnosti, t.j. vedia povedať kontrapríklad pre aké dĺžky a, b, c nepôjde o dĺžky strán trojuholníka. V časti b) ide o vlastnosti n-uholníkov a uvedomenie si, koľko pravých uhlov môže mať päťuholník (konvexný, alebo nekonvexný). V časti c) ide u uvedomenie si, že zmenšením obsahu sa nemusí zmeniť aj obvod. Časť d) je zameraná na pochopenie pojmu zlomok a delenia na rovnaké časti a časť e) je zameraná na najčastejšiu chybu pri práci s percentami (problém určenia základu).

Práca s tvrdeniami ktoré nie sú pravdivé má tiež svoje opodstatnenie. Minimálne také, že si žiaci môžu uvedomiť, ako nepresnosť vyjadrovania môže viesť k neurčitým záverom, napr. že je výrazný rozdiel medzi ostrou a neostrou nerovnosťou.

Záver

Rozvoj argumentačnej úrovne žiakov nie je jednorazová činnosť. Malo by ísť o kontinuálnu prácu na hodinách matematiky už od prvého stupňa. Samozrejme, aktivity musia byť primerané kognitívnej úrovni žiakov. Úlohy, na ktorých možno rozvíjať argumentáciu svojich žiakov by mali byť kontextovo pestré, obsahujúce skúmanie, hľadanie rôznych ciest k nájdeniu odpovede, či tvrdenie je, alebo nie je platné. To vedie k formulovaniu (spočiatku triviálnych) hypotéz, k zovšeobecneniu a overeniu. Dôležitou súčasťou je komunikácia v triede, schopnosť počúvať argumenty ostatných a vedieť na ne zareagovať. Tým sa rozvíja aj schopnosť komunikácie, prezentovania výsledkov a upevnenie vzorcov chovania sa v skupine.

Potreba argumentovať nevznikne sama o sebe, je potrebné ju podporiť vhodnými úlohami a doplňujúcimi otázkami k nim. V učebnici nie je hneď na prvý pohľad jasné, či sa argument vyžaduje, alebo nie. Je na našom zvážení, kedy a ako veľmi do hĺbky argument vyžadovať. Dôležité je nielen sa pýtať „Prečo?“, ale aj vedieť, kedy sa prestať pýtať.

Poďakovanie

Tento príspevok bol podporený projektom H2020 č. 951822 MaTeK (http://projectmatek.eu).

Literatura

de Villiers, M. (1990). The Role of Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras, 24*(24), s. 17–24.

Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmins warrants: an epistemic approach. *Argumentation, 19*(3), s. 331–346. https://doi.org/10.1007/s10503-005-4420-0

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, *21*(1), s. 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), s. 379–405.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Šedivý, O. Čeretková, S., Malperová, M., & Bálint, Ľ. (2008). *Matematika pre 8. ročník základných škôl. 2. časť.* SPN, 5. vydanie.

Štátny pedagogický ústav (2016). *Inovovaný štátny vzdelávací program. Matematika a práca s informáciami.* https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf

Žabka, J., & Černek, P. (2012). *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník osemročných gymnázií. 2. časť.* Orbis Pictus.