Università degli studi di Palermo

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Matematica (LM-40)

Argomentazione, Spiegazione e Dimostrazione nei testi di Matematica della Scuola secondaria di secondo grado: esiti di un'indagine internazionale

Tesi di Laurea di:
Ivana D'Alessandro

Relatore:
Prof. Benedetto Di Paola

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

MAGISTRALE

"Ho affermato che le matematiche sono molto utili
per abituare la mente a un raziocinio esatto e ordinato;
con ciò non è che io creda necessario che
tutti gli uomini diventino dei matematici,
ma quando con questo studio hanno acquisito
il buon metodo di ragionare,
essi lo possono usare in tutte le altri parti
delle nostre conoscenze."

John Locke

Indice

Introduzione

Dai dati OCSE-PISA è emerso che negli studenti italiani è particolarmente carente la competenza inferenziale, competenza logica che risulta indispensabile per rispondere adeguatamente ai quesiti aperti, che contrassegnano i livelli medio alti di rendimento OCSE-PISA in Matematica, ma anche in Scienze e in Lettura (Di Martino et al., 2018; Piseri 2020).

Gli studenti, mostrano di privilegiare un approccio meramente procedurale e nozionistico nella risoluzione dei problemi, capace solo di esecuzioni meccaniche di istruzioni standardizzate.

Negli ultimi anni, tuttavia, si è assistito a un crescente apprezzamento dell'importanza del ragionamento e della dimostrazione nella matematica scolastica, soprattutto a causa della sua centralità sia per la materia stessa come disciplina sia per l'apprendimento della matematica con comprensione, un obiettivo educativo di primaria importanza in un mondo circondato dalle tecnologie digitali (Palmiero, 2015).

È improbabile che gli studenti sviluppino competenze nel ragionamento e nella dimostrazione su larga scala, a meno che non si presti attenzione a questa pratica matematica anche nei materiali curricolari.

Un fattore che influenza in modo significativo l'insegnamento in classe e le opportunità di apprendimento della matematica per gli studenti è il libro di testo utilizzato.

In questa tesi, dopo aver delineato un quadro teorico relativo al Reasonong & Proof (R&P), viene proposta un'analisi di alcuni problemi legati a questo stesso subject matematico proposto su un manuale di scuola secondaria superiore, tra i più diffusi in Italia.

La ricerca ha dimostrato che il primo e più importante passo per condurre un'analisi curricolare di questo tipo è produrre un quadro analitico che possa essere utilizzato come strumento per indagare le opportunità che i libri di testo di matematica offrono agli studenti di impegnarsi nel ragionamento e nella dimostrazione.

La presente tesi si declina in tre capitoli.

Nel primo capitolo viene fatto un quadro teorico di quanto si trova in letteratura riguardo argomentazione, spiegazione e dimostrazione.

Nel secondo, in un primo momento, si analizza la tesi di dottorato della Dottoressa Pompili, discussa all'Università di Palermo nel 2015, in cui si fa un'analisi di alcuni libri di testo, nell'ambito algebrico, per osservare quanto in essi si faccia con chiarezza la distinzione tra spiegazione e dimostrazione, e in un secondo momento, si rileva come questa ricerca può essere migliorata attraverso lo studio internazionale svolto dai ricercatori del progetto MaTeK (https://www.projectmatek.eu), progetto finanziato dal programma di ricerca e innovazione Horizon 2020, in cui si analizzano e classificano i problemi svolti di R&P dei manuali scolastici di grado 8, rispetto al modo di ragionare che si utilizza nella risoluzione.

Nel terzo ed ultimo capitolo, infine, tenendo conto del quadro analitico ben strutturato che si è pian piano delineato, si realizza un'analisi sul volume di geometria di un libro di testo di scuola secondaria di secondo grado, il *Fraschini R., Grazzi G. Geometria. Bergamo: ATLAS. (Ristampa 2009)*, uno dei più diffusi in Italia.

Vista la complessità dell'andare ad osservare i problemi di R&P per argomentazione sottesa, si è scelto, come MaTeK, di analizzare in questo momento soltanto gli item risolti.

Capitolo 1

Argomentazione, Spiegazione e Dimostrazione: riferimenti teorici in Didattica della Matematica

1.1 Argomentazione matematica

Uno dei modi più semplici per iniziare a parlare di argomentazione consiste nel dare la definizione di "argomento" come *"ragione addotta per la validità di una affermazione"* (può trattarsi di un dato, di un'esperienza, del riferimento ad una teoria condivisa, ecc.), e nel considerare una "argomentazione" come *"un discorso che coordina diversi argomenti al fine di giustificare una affermazione"*.

Importanti vocabolari (come il Webster, per la lingua inglese) adottano tale definizione. Ci si rende tuttavia conto che, quando si vuole analizzare un testo o stabilire se si tratta di una argomentazione, è una definizione insufficiente, in quanto alcune parole usate ("ragione", "coordina"...) dovrebbero a loro volta essere definite.

L'esigenza di parlare di argomentazione in matematica deriva dalla necessità di caratterizzare i processi messi in atto durante la risoluzione di un problema, ovvero i processi di scoperta, i processi che costruiscono una congettura e quelli che la esplorano.

I processi che giustificano un'affermazione non sempre provengono da una dimostrazione. Spesso le giustificazioni in matematica sono argomenti. Questo non significa che tutte le giustificazioni matematiche siano argomenti matematici, ma che una particolarità dell'argomentazione in matematica è il suo carattere giustificativo.

Questo carattere giustificativo si esprime nel ragionamento.
Il ragionamento è il processo di inferenza esplicita che deriva dall'affermazione di una o più proposizioni date (Duval, 1995, p. 209). In questa tesi si condivide il pensiero di Duval, che l'argomentazione sia un ragionamento e che anche l'argomentazione matematica sia un ragionamento.
Infatti, il ragionamento matematico non può essere ridotto al ragionamento dimostrativo, che permette di dedurre conclusioni da premesse date per mezzo di regole di inferenza esplicitate in anticipo. Esistono ragionamenti matematici, specifici dell'argomentazione, che vogliono semplicemente dare "ragioni" per l'accettazione o la confutazione di certe proposizioni.
Le "ragioni" sono tutti i possibili permessi di deduzione che costituiscono l'argomento, dunque permettono l'esplicitazione di una argomentazione basata sul ragionamento .
È sulla base di queste considerazioni che si afferma che l'argomentazione in matematica è soprattutto una giustificazione razionale.
Si noti che l'argomentazione in matematica è distaccata dalla spiegazione.
L'argomentazione non può sfuggire alla razionalità come la spiegazione. La spiegazione in matematica mira a far capire, a chiarire aspetti del pensiero che potrebbero non essere evidenti agli altri (Yackel, 2001). L'argomentazione non si accontenta di capire, vuole convincere.
L'argomentazione si sviluppa come teoria "funzionale" in quanto risponde a un bisogno, quello di persuadere un pubblico.
La teoria dell'argomentazione ha origini molto antiche, basti pensare che fu Aristotele il primo a costruire una teoria sistematica della retorica, una tecnica di argomentazione per la plausibilità, ma non per forza per la verità. Infatti l'obiettivo della retorica è trovare un metodo che ci permetta di argomentare qualsiasi problema proposto a partire da premesse probabili.
Tuttavia, la retorica non è l'unica tecnica disponibile per persuadere un pubblico. Aristotele distingue tre ambiti in cui si esercita l'arte del discorso: la retorica, la dialettica e l'analitica (in seguito chiamata logica). Nella sua classificazione, egli affianca la retorica e la dialettica perché si occupano di questioni comuni a tutti gli uomini e non appartengono alla scienza. D'altra parte, l'analitica è un argomento scientifico.
La retorica e la dialettica sono due forme di razionalità non scientifica. Sono forme

di argomentazione dialogica, cioè rivolte a un pubblico. Tuttavia, la dialettica si rivolgeva a un interlocutore che conosceva bene l'argomento della discussione e che era in grado di rispondere alle domande o di confutare gli argomenti dell'argomentatore.

La retorica, invece, si rivolgeva a un pubblico piuttosto silenzioso composto da diverse persone; l'oratore poteva utilizzare qualsiasi metodo, qualsiasi strategia per persuadere il suo pubblico.

L'argomentazione retorica e dialettica non porta necessariamente a conclusioni vere perché i principi di partenza non sono necessariamente veri. Tuttavia, il dialettico parte da principi ("endoxa") che ritiene veri, mentre il retore non è necessariamente convinto della verità delle affermazioni che difende.

L'analitica è una forma di razionalità scientifica che non è necessariamente destinata a un pubblico, è una forma di argomentazione monologica. È lo strumento ("organon") che dovrebbe rendere possibile un ragionamento corretto in ambito scientifico.

Questa classificazione permette di collocare l'argomentazione nella matematica.

In un certo senso, l'analitica corrisponde alla dimostrazione che costruisce un ragionamento corretto in matematica. La dialettica, che non porta necessariamente a conclusioni vere ma che parte da principi che sono veri per chi argomenta, corrisponderebbe all'argomentazione in matematica.

Quando la matematica è in costruzione, quando ci si chiede se un'affermazione matematica sia vera, quando si cerca una soluzione a un problema, l'argomentazione utilizzata è quella dialettica. Non è analitica perché le premesse non sono necessariamente vere. Non è nemmeno retorica perché la persona che argomenta in matematica crede che i principi da cui parte siano veri.

Tuttavia, in relazione ad Aristotele, si ritiene che la distinzione cruciale non sia tra analitica e dialettica/retorica, ma piuttosto tra retorica e dialettica/analitica. In effetti, la dialettica e l'analitica hanno uno scopo comune: determinare la verità. L'obiettivo di un'argomentazione retorica, invece, è quello di persuadere l'interlocutore senza necessariamente entrare in un problema di verità, affidandosi ad esempio ai sentimenti del pubblico. La matematica, per sua natura, si basa sulla verità.

Di conseguenza, le argomentazioni devono "avere" come caratteristica principale la ricerca della verità.

Tuttavia, accanto a una "teoria funzionale" dell'argomentazione, si sviluppa una "teoria strutturale".

Sulla base delle considerazioni sviluppate dalle teorie linguistiche contemporanee (Plantin, 1990; Toulmin, 1958; Perelman Olbrechts-Tyteca, 1958; Ascombre e Ducrot, 1983) si può dividere la caratterizzazione dell'argomentazione in due rami:

– Caratteristiche funzionali dell'argomentazione;

– Caratteristiche strutturali dell'argomentazione.

Le caratteristiche funzionali determinano lo scopo dell'argomento, la sua utilità, il suo ruolo all'interno di un discorso. Le caratteristiche strutturali ne definiscono la struttura.

L'argomentazione è un processo di trasmissione di contenuti, idee e valori epistemici. Si tratta di elementi in evoluzione che caratterizzano lo scopo di un'argomentazione. Ha sempre un obiettivo che ne determina l'orientamento. Quando si costruisce un'argomentazione, i contenuti cambiano, le idee prendono forma, i valori epistemici si evolvono.

Il valore epistemico ha un ruolo cruciale nella definizione stessa di argomentazione. Un'argomentazione è sempre orientata a fare in modo che l'interlocutore modifichi il valore epistemico attribuito a un enunciato, e questo dipende esclusivamente dai contenuti semantici delle proposizioni che compongono l'argomentazione e in definitiva dall'interpretazione che gli interlocutori danno degli enunciati in gioco.

L'argomentazione matematica è un ragionamento logico, che può essere scomposto in parti per metterne in luce la struttura.

Toulmin, grande filosofo e matematico inglese, propone uno schema metodologico, in cui ogni parte dell'argomentazione è un passo composto da almeno tre elementi: i dati, una conclusione e una licenza di inferire, ossia di trarre una conclusione partendo da una determinata premessa o dalla constatazione di un fatto.

Ognuno di questi passaggi viene chiamato argomento. Si può caratterizzare la struttura dell'argomentazione a due livelli: una macrostruttura e una microstruttura. Il primo permette un'analisi in termini di argomenti. Il secondo permette un'analisi in termini di parole. Ai fini di questa tesi interessa la prima analisi; può darsi che un'analisi delle parole sia troppo fine per un confronto con la dimostrazione.

1.2 Spiegazione matematica

Nel vocabolario della lingua italiana (Zingarelli, 2010) alla voce spiegazione si trova:

- *"l'atto, il fatto e il modo di rendere chiaro ciò che è oscuro e difficile da comprendere";*
- *"ciò che serve a spiegare un fatto, cioè a giustificarlo, a capirne le ragioni".*

Le due definizioni mettono in evidenza i due sensi comunemente attribuiti al termine spiegazione ed emergenti dai normali contesti d'uso del termine stesso. Entrambe le accezioni chiamano in causa la comprensione e indicano due funzioni importanti della spiegazione. La prima accezione richiama la funzione principale della spiegazione, che consiste nel rendere chiaro qualcosa che si mostra come 'oscuro', cioè non direttamente accessibile ai nostri sensi e alla nostra comprensione. Uno dei modi possibili di favorire tale accesso è indicato dalla seconda accezione: si può favorire la comprensione di un fatto esplicitando le ragioni che giustificano il fatto stesso (Pompili, 2015).
Si tratta di particolari discorsi aventi lo scopo di favorire la comprensione, da parte di un soggetto, di un determinato oggetto o fatto.
La spiegazione si caratterizza per il fatto che esiste un'asimmetria conoscitiva tra chi la produce e chi la riceve; precisamente, l'oggetto del discorso esplicativo è noto all'autore della spiegazione, mentre è ignoto ai destinatari. A differenza dell'argomentazione e della dimostrazione che si rivolgono ad un uditorio universale (Pedemonte, 2002).
"Nella nostra visione, un discorso funzionerà come una spiegazione per un soggetto, ovvero favorirà la sua comprensione, quando sia gli enunciati che intervengono nel discorso sia le relazioni tra essi appartengono al suo sistema di conoscenze. Diversamente, se qualcuno degli elementi coinvolti nel discorso non risultasse disponibile per l'interlocutore, il discorso stesso non verrebbe riconosciuto come spiegazione." (Pompili, 2015, pag.17)
Il luogo in cui le spiegazioni trovano una loro naturale collocazione, ma anche la massima espressione della loro funzione, è l'ambito scolastico, soprattutto quando il modello pedagogico a cui ci si ispira per l'organizzazione delle attività didattiche si basa sul metodo della lezione frontale, tipico del modello pedagogico tradizionale.
In tale modello, le attività didattiche potrebbero schematizzarsi come dei cicli co-

stituiti da tre fasi fondamentali: spiegazione, assimilazione e verifica.

In una situazione di questo tipo, le spiegazioni dell'insegnante rappresentano un elemento cardine delle attività didattiche. Lo studente assiste, interpretando ed interiorizzando queste spiegazioni sulla base delle conoscenze a lui disponibili.

Si può dare una delineazione della spiegazione tramite aspetti peculiari, per farlo si utilizzeranno la caratterizzazione fatta della dott.ssa Roberta Pompili nella sua tesi di dottorato, presso il dipartimento di matematica dell'Università di Palermo .

Secondo il lavoro di ricerca della suddetta Dottoressa, la spiegazione si presenta come un discorso caratterizzato da molteplici parametri interrelati, che si distinguono in parametri di contesto e parametri di contenuto.

Una spiegazione, come qualsiasi discorso, si concretizza all'interno di un complesso di fattori esterni che ne influenzano inevitabilmente l'emissione e la ricezione da parte degli interlocutori. Tale complesso di fattori è comunemente chiamato contesto.

In linguistica, il contesto è ciò che consente ad una semplice frase, intesa come unità grammaticale, di elevarsi al rango di enunciato, inteso invece come unità testuale (De Mauro, 1998). Il contesto nel quale in questa tesi si esamineranno le spiegazioni è quello scolastico, intendendo con questo un complesso di situazioni riconducibili all'istituzione scolastica, ma non necessariamente emergenti all'interno della scuola intesa come luogo. Costituiscono parte integrante di tale contesto i libri scolastici, dunque la spiegazione in un libro di testo si caratterizza in un contesto scolastico esattamente come la spiegazione dell'insegnante in classe.

Tra i parametri del contesto si trovano:

Situazione generale:

Per situazione generale si intende la circostanza reale, spaziale e temporale, che fa da sfondo all'interazione comunicativa e in cui si possono ritrovare tutti quei fattori extralinguistici (psicologici, sociali, culturali) che condizionano la produzione e la comprensione della spiegazione in quel momento e in quel luogo.

La situazione più generale entro cui prendono forma le spiegazioni che analizzeremo può indicarsi come una situazione di insegnamento e apprendimento della matematica.

Interlocutori:

Ossia gli individui coinvolti nella comunicazione. Essi possono essere due, o più di due, e partecipano all'atto comunicativo secondo ruoli ben distinti.

Ci sarà sempre un individuo che produce la spiegazione, e ci sarà sempre un indi-

viduo o un gruppo di individui che ricevono la spiegazione. Ci si riferirà al primo come l'autore della spiegazione, mentre i secondi come destinatari della spiegazione. Nel contesto scolastico, il ruolo di autore di una spiegazione può essere svolto dall'insegnante o dallo studente, ma anche dall'autore di un libro di testo.
Il ruolo di destinatario può essere assolto sia dall'insegnante che dallo studente.

Tipo di relazione tra gli interlocutori:

Tali relazioni possono essere: uno-a-uno, ossia tra due individui, uno nel ruolo di autore e l'altro nel ruolo di destinatario (ad esempio, una spiegazione individualizzata); uno-a-molti, cioè un autore verso molti destinatari (ad esempio, la lezione frontale).
In generale, è possibile che la spiegazione di uno stesso contenuto possa assumere caratteristiche diverse se si rivolge ad un individuo specifico o a un gruppo di individui.

Linguaggio:

Il fine esplicativo perseguito dall'autore lo porta a compiere delle scelte lessicali e espositive che dipendono dalle caratteristiche del suo interlocutore e, in particolare, dal repertorio linguistico a cui ritiene egli possa accedere. Il linguaggio utilizzato nella spiegazione deve prima di tutto essere accessibile al destinatario.
Nella spiegazione in matematica, l'argomento del discorso costringe l'autore a cercare un compromesso tra il linguaggio specifico della matematica e il bisogno di farsi comprendere dal suo interlocutore. Tale compromesso dà origine a un linguaggio misto che alterna espressioni proprie del linguaggio specifico della matematica ad espressioni simboliche, ma anche ad espressioni del linguaggio comune.

Origine della spiegazione:

La spiegazione è una produzione discorsiva che ha origine come risposta a una domanda esplicita o implicita del destinatario.

Forma:

La spiegazione dell'insegnante è in forma prevalentemente orale, per quanto essa possa alternare espressioni in forma orale ad espressioni in forma scritta utilizzando qualche supporto didattico, ad esempio lavagna, fogli di carta, monitor, o altro. La spiegazione in un libro di testo è, invece, esclusivamente in forma scritta.

Gli altri parametri fondamentali sono quelli di contenuto di una spiegazione, che sono: il campo semantico cui rimandano i termini usati nel testo con cui si identifi-

ca, l'oggetto della spiegazione e lo scopo specifico che persegue.
Nel dettaglio:

Campo semantico:
Il campo semantico è un insieme di parole di una stessa lingua connesse da relazioni sintagmatiche e paradigmatiche. Le parole appartenenti ad uno stesso campo semantico sono in relazione tra loro o in quanto potenziali elementi di uno stesso enunciato, o in quanto sinonimi, meronimi, iponimi ecc.
Anche i termini del linguaggio matematico possono definire dei campi semantici. Ad esempio, la parola "polinomio" può definire il campo semantico contenente parole come "grado", "monomio", "moltiplicare", "scomporre", e così via. L'algebra, come anche l'aritmetica, e tutti i diversi ambiti della matematica possono considerarsi campi semantici.
Oggetto della spiegazione:
Il compito principale di una spiegazione è di esplicitare il senso di un oggetto o di un fatto, che rappresenta l'oggetto della spiegazione. Pertanto, l'esistenza di una spiegazione è vincolata all'esistenza di un oggetto da spiegare, sia esso esplicitamente dichiarato o deducibile dal contesto comunicativo in essere.
l'autore dovrà mettere in campo delle strategie che gli permettano di rendere accessibile per il destinatario l'oggetto della spiegazione, prima incompreso o ignoto. Egli dovrà esplicitare quelle relazioni a lui note tra il nuovo contenuto e altre conoscenze; tuttavia, per fare questo non potrà riferirsi a qualsiasi conoscenza in suo possesso, ma dovrà tener conto di quali tra queste conoscenze sono disponibili al suo particolare destinatario. Dovrà conoscere, dunque, o presupporre quali siano le conoscenze condivise col suo interlocutore.
Scopo della spiegazione:
Lo scopo di una spiegazione è il particolare obiettivo che l'autore intende raggiungere con la spiegazione proposta. L'obiettivo generale dell'autore della spiegazione è sempre quello di facilitare la comprensione del destinatario, cercando di mettere in relazione ciò che non sa con altre conoscenze da lui già possedute.

Sebbene, in generale, la spiegazione può considerarsi un testo a bassa densità informativa (Jansen, 2003), nel caso della spiegazione matematica, il contributo concomitante del linguaggio naturale e del linguaggio specifico e simbolico porta alla produzione di testi particolarmente densi, ossia brevi e ricchi di informazioni, che richiedono un importante lavoro di decodificazione da parte del destinatario (Laborde, 1995)

1.3 Dimostrazione matematica

Una definizione possibile di dimostrazione matematica è la seguente:
"La dimostrazione è una produzione discorsiva che si sviluppa come concatenamento di giustificazioni razionali espresse in forma di derivazione logica e ha lo scopo di validare un enunciato all'interno di una teoria assiomatica". (Pompili,2015, p. 28)
La definizione proposta pone l'accento su due distinti livelli di organizzazione all'interno della dimostrazione: un'organizzazione locale riguardante gli enunciati che compongono le singole deduzioni e un'organizzazione globale che riguarda invece la coerenza e la continuità del discorso nel suo insieme, come sequenza delle singole deduzioni (Pompili, 2015).
Le deduzioni operano su degli enunciati, assunti veri (ipotesi), derivandone una conseguenza necessaria (tesi) mediante l'applicazione, esplicita o implicita, di un enunciato appartenente al sistema teorico prestabilito. Una deduzione può realizzarsi con più passaggi logici che collegano le ipotesi alla tesi; si chiameranno passo deduttivo le deduzioni costituite da un solo passaggio.
All'interno di un passo deduttivo un enunciato assume, per i suoi interlocutori, sia un valore logico riferibile ad un piano di interpretazione teorico, sia un valore epistemico dipendente dal contenuto e rintracciabile sul piano semantico delle interpretazioni personali del soggetto. Il valore logico di un enunciato è il suo valore di verità, che per Duval può essere vero, falso o anche indeterminato (Duval, 1995).
Riferendoci ancora a Duval, gli enunciati di un discorso teorico sono caratterizzati dall'avere un particolare statuto all'interno del passo deduttivo. *"Lo statuto di un enunciato è ciò che determina il suo posto nell'organizzazione discorsiva di un insieme di enunciati"* (Duval, 1995, p. 223) e non dipende dal suo contenuto, ma solo dal quadro teorico fissato in partenza. *"Gli enunciati di un passo deduttivo possono avere due diversi statuti: uno statuto legato al loro ruolo nell'organizzazione interna della deduzione, detto statuto operativo, e uno statuto legato al loro ruolo all'interno del quadro teorico di riferimento, detto statuto teorico"* (Duval, 1995, p. 224).
Fissato un sistema teorico, gli enunciati in esso presenti potranno avere lo statu-

to teorico di ipotesi, tesi, teorema, definizione, assioma, regola, ecc. Nel momento in cui questi enunciati teorici verranno usati in un passo deduttivo, il loro statuto teorico determinerà anche il loro statuto operativo, che potrà essere di premessa, di conclusione o di enunciato terzo; quest'ultimo è l'enunciato che mette in relazione le premesse con la conclusione e, in un contesto teorico, può essere solo una definizione, un assioma o un teorema. *"Gli enunciati di un passo deduttivo hanno sia uno statuto teorico, che uno statuto operativo"* (Duval, 1995, p. 236).

La dimostrazione è un discorso teorico il cui principale obiettivo è validare un enunciato matematico, esplicitato in forma di enunciato, all'interno di una teoria assiomatica. In matematica, convalidare un'affermazione significa attestarne la verità all'interno di una teoria matematica. In un certo senso, la dimostrazione, come l'argomentazione, ha come obiettivo la ricerca delle ragioni della "verità".

La dimostrazione è una catena deduttiva di passi costituita da tre termini: i dati, un enunciato di conclusione, un teorema che permette il passaggio dai dati alla conclusione. A partire dagli assiomi e dai principi primi, attraverso una dimostrazione si può costruire un nuovo enunciato. Per questo motivo, sia la dimostrazione che l'argomentazione sono analizzabili con il modello di Toulmin. La licenza di inferire nella dimostrazione è un teorema. Le caratteristiche strutturali e funzionali della dimostrazione sono casi particolari delle caratteristiche che abbiamo ricordato per l'argomentazione. Gli aspetti di vicinanza tra la dimostrazione e l'argomentazione comune possono rappresentare un punto d'appoggio per l'insegnante su cui fondare la comprensione dello studente; tuttavia, è necessario che quest'ultimo raggiunga una prospettiva teorica, cioè che diventi consapevole della particolare natura della validazione rispetto ad una teoria (Mariotti M. A., 2006).

Capitolo 2

Indagine nazionale e internazionale nella ricerca in Didattica della Matematica

Decenni di studi e di ricerche, attestano l'importanza del ruolo della dimostrazione, dell'argomentazione e della spiegazione nell'educazione matematica nelle scuole di ogni ordine e grado. In letteratura ci sono diversi studi che mettono in evidenza come sia possibile progettare interventi didattici specifici che portano lo studente a sfruttare consapevolmente le analogie tra argomentazione e dimostrazione, ma un elemento di difficoltà che spesso determina il fallimento di interventi fondati sulla continuità tra i due tipi di ragionamenti sembra essere costituito dall'omettere o dal non esplicitare le differenze tra i diversi discorsi. Proprio su questo punto si focalizza il lavoro di ricerca della Dott.essa Pompili.

Alla luce del quadro teorico e vista l'importanza di questa ricerca, si ritiene di concordare con le posizioni prese dalla Dott.essa Pompili. Si crede, tuttavia, che la conclusione della ricerca sia strettamente legata al modo in cui egli definisce la spiegazione. Per questo motivo, si ritiene sia restrittivo fermarsi ad un analisi nazionale, e anzi, sia necessario fare dei miglioramenti attraverso l'uso di nuovi codici, determinati dalla ricerca internazionale dei ricercatori del progetto MaTeK sviluppati nel 2021.

2.1 La ricerca sperimentale di Pompili 2015

Così come riportato in Pompili 2015, lo scopo generale

"è quello di esaminare in che modo la mancanza di consapevolezza della continuità, ma anche della distinzione, tra dimostrazione e altre produzioni discorsive orientate a giustificare la verità di un enunciato può portare a delle situazioni di ambiguità che anziché avere effetti positivi possono generare ostacoli per lo studente rispetto alla comprensione dell'idea di dimostrazione."

(Pompili, 2015, p.16)

Ci si chiede dunque cosa succede se nello studente la consapevolezza della specificità della dimostrazione matematica non viene costruita, quali sono i rischi?

Non avere consapevolezza di ciò che rende diversi, potrebbe portare l'allievo a confondere una dimostrazione con una spiegazione e viceversa compromettendo la comprensione di cosa significa dimostrare e di cosa sia un Teorema.

In questa ricerca la dott.essa Pompili, così come faremo anche noi, si è interessata ai discorsi che vengono fatti agli studenti dall'insegnante e soprattutto quelli che si trovano sui libri di testo.

Con l'intento di studiare le relazioni tra spiegazione e dimostrazione, l'indagine si è sviluppata in due fasi consecutive: prima l'analisi dei libri di testo e poi l'indagine del punto di vista degli insegnanti. Questo è servito per osservare se e in che termini la pratica scolastica, e in particolare le spiegazioni dell'insegnante, sono condizionate da ciò che si trova nei manuali scolastici.

Infatti nella ricerca della Pompili, così come verrà fatto in questa tesi, sono state prese in considerazione due ipotesi:

- H_1: visto che nella pratica didattica, spiegazione e dimostrazione condividono alcuni dei loro parametri caratterizzanti, l'interlocuture può fare confusione tra lo status di spiegazione e lo status di dimostrazione. In questo caso si parla di ipotesi dello scivolamento.

- H_2: come detto prima, la pratica scolastica potrebbe essere condizionata dai libri di testo. In questo caso si parla di ipotesi di condizionamento.

2.2 Analisi di libri di testo di scuola secondaria superiore italiania

L'analisi dei libri di testo ha interessato tre manuali di algebra, i più utilizzati nella scuola secondaria superiore italiana.
L'analisi si è limitata ai capitoli dei primi volumi dedicati al calcolo letterale e alla risoluzione di equazioni di primo grado.
Designeremo tali manuali come segue:

- *Manuale A: Primo Volume di Fraschini R., Grazzi G. Algebra. Bergamo: ATLAS. (Ristampa 2009),*
- *Manuale B: Primo Volume di Dodero N., Baroncini P., Manfredi R., Lineamenti di algebra. Milano: GhisettiCorvi. (Ristampa 2005),*
- *Manuale C: Primo Volume di Bergamini M., Trifone A., Manuale di algebra. Bologna: Zanichelli. (Ristampa 2010).*

Sono state individuate e selezionate, all'interno dei manuali di algebra, 84 spiegazioni giustificative, ossia spiegazioni caratterizzate dall'avere come oggetto un enunciato e come scopo quello di apportare ragioni a suo sostegno. Tali spiegazioni sono state estrapolate dai tre volumi come indicato di seguito:
• 26 spiegazioni giustificative nel Manuale A, estratte dalle Unità 6, 7, 8, 9 e 10 della sezione dedicata alla teoria (106 pagine);
• 28 spiegazioni giustificative nel Manuale B, estratte dalla parte teorica dei Capitoli 6, 7 e 8 (93 pagine);
• 30 spiegazioni giustificative nel Manuale C, estratte dalla sezione della teoria del Modulo C+ (unità 1, 2 e 3) e parte del Modulo D+ (unità 1) (62 pagine).
Al fine di procedere alla sintesi dei risultati, delle prime 26 spiegazioni sono state riportate tutte le analisi, delle restanti 58 è stata riportata soltanto la tabella riepilogativa delle caratteristiche, costruita attraverso i codici dei valori assunti dai parametri che riportiamo nel seguente prospetto.

Categorie	Parametro	Descrittore	Codice
Campo del discorso	Oggetto della spiegazione S_x	Enunciato matematico	EM_x
	Campo semantico	Generico, ossia riguardante oggetti ed enunciati ascrivibili all'ambito matematico e all'ambito dell'esperienza comune	CGen
		Algebrico, ossia riguardante oggetti ed enunciati ascrivibili all'ambito algebrico	CAlg
		Matematico, ossia riguardante oggetti ed enunciati ascrivibili a diversi ambiti della matematica	CMat
	Variazione diafasica	Variazione all'interno del testo del campo semantico di riferimento, che passa dal campo reale al campo algebrico	CRe→CAlg
		Variazione all'interno del testo del campo semantico di riferimento, che passa dal campo aritmetico al campo algebrico	CAr→CAlg
		Variazione all'interno del testo del campo semantico di riferimento, che passa dal campo algebrico al campo geometrico	CAlg→CGeo
Modo del discorso	Scopo	Giustificare l'enunciato matematico EM_x	J- EM_x
	Strumenti cognitivi	Esempio proposto come caso particolare da generalizzare	P→G
		Esempio proposto dopo un enunciato generale come caso particolare	G→P
		Metafora	Metaf
		Analogia	An
		Conversione di rappresentazione da un registro semiotico ad un altro	CoR
		Trattamento di rappresentazione all'interno dello stesso registro	TrR
		Inferenze logiche	InfLo
	Forma	Forma scritta esclusivamente nel linguaggio verbale	W-Vb
		Forma scritta con elementi grafici	W-Grf
		Forma orale	O
	Variazione diafasica	Variazione del canale fisico di comunicazione da orale a scritto	O→W
	Struttura locale	Enunciati espressi in forma di inferenze con struttura locale ternaria	Ter
		Proposizioni semplici o enunciati lineari	Lin
	Struttura globale	Spiegazione argomentativa proposta	(SA,E)

tabella riepilogativa delle caratteristiche di una spiegazione

		prima dell'enunciato oggetto della spiegazione	
		Spiegazione argomentativa proposta dopo l'enunciato oggetto della spiegazione	(E,SA)
		Spiegazione descrittiva proposta prima dell'enunciato oggetto della spiegazione	(SD,E)
		Spiegazione descrittiva proposta dopo l'enunciato oggetto della spiegazione	(E,SD)
		Spiegazione disomogenea (descrittiva e argomentativa) proposta prima dell'enunciato oggetto della spiegazione	(SM,E)
		Spiegazione disomogenea (descrittiva e argomentativa) proposta dopo l'enunciato oggetto della spiegazione	(E,SM)
	Concatenamento	Secondo la regola del riciclaggio	Ric
		Semantico	Sem
Tenore del discorso	Registro linguistico	Registro formale	RF
		Registro informale	RI
	Variazione diafasica di registro	Variazione all'interno del testo del registro linguistico usato, che passa dal registro informale al registro formale	RI→RF

Tabella 1: tabella riepilogativa delle caratteristiche di una spiegazione

Dall'analisi dei libri di testo sono emersi diversi modi di usare gli esempi di R&P, sia per giustificare enunciati sia per illustrare l'applicazione di regole. Nello specifico sono presenti: l'esempio proposto nel corso della spiegazione prima dell'enunciato generale per mettere in evidenza le regole di trattamento da applicare per pervenire alla nuova rappresentazione cercata, e l'esempio proposto al termine della spiegazione e dopo l'enunciato generale per illustrare in modo ostensivo l'esecuzione della procedura.

Di seguito si riporta l'analisi proposta dalla dottoressa Pompili di alcune spiegazione, da lei indicate con S_n con n che sta ad esprimere il numero della spiegazione analizzata.

Spiegazione S_1

Trascrizione spiegazione S_1:

1. Se in un cestino ci sono 3 mele e aggiungiamo altre 2 mele alla fine nel cestino
2. avremo 5 mele; se nello zaino hai 2 quaderni e aggiungiamo altri 4 quaderni,
3. alla fine avrai 6 quaderni; ma se alle 3 mele nel cestino aggiungiamo 4 arance,
4. avremo sempre 3 mele 4 arance. Così, se dobbiamo sommare $3x$ e $2x$,

5. possiamo dire che la somma è $5x$; ma se dobbiamo sommare $3x$ e $4a$,
6. alla fine avremo ancora $3x$ e $4a$. Questo perché per calcolare $3x + 2x$,
7. tenendo presente che la lettera x rappresenta lo stesso numero in entrambi i
8. monomi si può applicare la proprietà di raccoglimento che abbiamo visto nel
9. secondo modulo: $3x + 2x = x(3 + 2) = 5x$ proprietà che non può essere usata per
10. sommare $3x$ e $4a$ visto che x e a rappresentano in genere numeri diversi.
11. Possiamo allora enunciare la seguente regola. La somma di due monomi simili
12. è un monomio simile a quelli dati il cui coefficiente numerico è la somma
13. algebrica dei coefficienti dei due monomi.

La spiegazione intende sostenere la verità del seguente enunciato matematico:

EM1: La somma di due monomi simili è un monomio simile a quelli dati il cui coefficiente numerico è la somma algebrica dei coefficienti dei due monomi.

Si è individuata una variazione diafasica che riguarda sia il registro linguistico che il campo semantico. Nel testo, infatti, si possono individuare due sottospiegazioni: la prima è caratterizzata da un registro informale e dall'uso del linguaggio comune che rimanda a significati ascrivibili alla sfera quotidiana, mentre la seconda è caratterizzata da un registro formale e dall'uso di un linguaggio specialistico che rimanda a significati ascrivibili all'ambito algebrico. Pertanto, il tenore del discorso è caratterizzato da una variazione diafasica di registro del tipo RI→RF, mentre il campo del discorso da una variazione diafasica del campo semantico, del tipo CRe→CAlg. Gli strumenti cognitivi utilizzati dall'Autore sono l'esempio (P→G), in quanto la regola generale viene dedotta da un'argomentazione che riguarda casi particolari di monomi simili e non simili, e soprattutto l'analogia (An) attraverso la quale si trasferisce la struttura inferenziale del discorso riguardante oggetti reali nel discorso matematico. Osserviamo che la precisazione «tenendo presente che la lettera x rappresenta lo stesso numero in entrambi i monomi» [righe 7-8] intende giustificare l'applicabilità della regola di raccoglimento definita nel caso numerico anche nel caso di monomi. Questa precisazione va a rafforzare l'analogia trasferendo il significato di "stessa lettera" come "stesso oggetto", in "stessa lettera" come "stesso numero". Anche il primo trattamento, al rigo 9, è usato come strumento cognitivo (TrR),

poiché permette da una parte di ricondursi ad un problema aritmetico, dall'altra di esplicitare l'idea generale su cui si basa la regola, ossia che per sommare due monomi simili si dovrà sommare i coefficienti dei monomi e conservare la parte letterale.
Il ricorso all'analogia fa sì che il campo semantico sia generico (CGen) coinvolgendo sia oggetti e azioni del contesto reale, sia oggetti e operazioni matematiche.
La spiegazione ha una struttura argomentativa ternaria ed è proposta prima dell'enunciato generale [(SA, E)]; il concatenamento dei suoi passi è di tipo semantico.

Caratteristiche S_1 : Somma di monomi simili pag. 177 *		
Campo del discorso	Oggetto	EM_1
	Campo sem.	CGen
	Variaz. Diafasica	CRe→CAlg
Modo del discorso	Scopo	J-EM_1
	Str. Cognitivi	An P→G TrR
	Forma	W-Vb
	Variaz. Diafasica	-
	Struttura locale	Ter
	Struttura globale	(SA, E)
	Concatenamento	Sem
Tenore del discorso	Registro	RI
	Variaz. Diafasica	RI→RF

Tabella 2: tabella riepilogativa di S_1

Spiegazione S_{11}

Il quadrato di un polinomio

Calcoliamo i seguenti quadrati applicando la regola appena imparata del quadrato di un binomio:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2} = [(a+b)+c]^2 =$$
$$= (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 =$$
$$= \boxed{\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2} = [(a+b)+(c+d)]^2 =$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 =$$
$$= \boxed{\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd}}$$

Se osservi i polinomi da elevare al quadrato ed i risultati finali, scoprirai che essi possono essere determinati subito con una semplice regola.

Il **quadrato di un polinomio** è un polinomio formato dalla somma dei quadrati di tutti i termini del polinomio stesso con i doppi prodotti di ciascun termine per tutti quelli che lo seguono.

Figura 1: Immagine della spiegazione S_{11} estratta dal libro di testo

L'enunciato che si intende giustificare è:

EM11: Il quadrato di un polinomio è un polinomio formato dalla somma dei quadrati di tutti i termini del polinomio stesso con i doppi prodotti di ciascun termine per tutti quelli che lo seguono.

Le caratteristiche di questa spiegazione, analoghe a quelle individuate per la spiegazione S10, sono riportate in tabella.

Caratteristiche S_{11}: Il quadrato di un polinomio pag. 199*		
Campo del discorso	Oggetto	EM_{11}
	Campo sem.	CAlg
	Variaz. Diafasica	-
Modo del discorso	Scopo	$J\text{-}EM_{11}$
	Str. Cognitivi	$P \rightarrow G$ TrR
	Forma	W-Vb
	Variaz. Diafasica	-
	Struttura locale	Ter
	Struttura globale	(SA, E)
	Concatenamento	Ric
Tenore del discorso	Registro	RI
	Variaz. Diafasica	$RI \rightarrow RF$

Tabella 3: tabella riepilogativa di S_{11}

Spiegazione S_{12}

Testo della spiegazione S_{12}

La somma di due monomi per la loro differenza

Calcoliamo il prodotto dei seguenti polinomi:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})} = a^2 - ab + ab - b^2 = \boxed{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2}$$

$$\boxed{(\mathbf{2}\boldsymbol{m} - \mathbf{3}\boldsymbol{n})(\mathbf{2}\boldsymbol{m} + \mathbf{3}\boldsymbol{n})} = 4m^2 + 6mn - 6mn - 9n^2 = \boxed{\mathbf{4}\boldsymbol{m}^2 - \mathbf{9}\boldsymbol{n}^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2\right)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2\right)} = \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{1}{2}a^2b^2 - b^4 = \boxed{\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^4 - \boldsymbol{b}^4}$$

$$\boxed{(-\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y})(-\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y})} = x^2 + 2xy - 2xy - 4y^2 = \boxed{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{4}\boldsymbol{y}^2}$$

Se osservi il risultato finale ti accorgerai che esso può essere determinato con la seguente regola.

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza si calcola:

1. individuando i due monomi che sono uguali in valore assoluto e segno nei due binomi
2. individuando i due monomi che hanno uguale valore assoluto ma segni opposti nei due binomi
3. calcolando la differenza fra il quadrato del monomio individuato al punto **1** ed il quadrato del monomio individuato al punto **2**.

Figura 2: immagine della spiegazione S_{12} estratta dal libro di testo

La regola che si intende giustificare è:

EM12: Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza si calcola: 1. individuando i due monomi che sono uguali in valore assoluto e segno nei due binomi; 2. individuando i due monomi che hanno uguale valore assoluto ma segni opposti nei due binomi; 3. calcolando la differenza fra il quadrato del monomio individuato al punto 1 ed il quadrato del monomio individuato al punto 2.

Le caratteristiche di questa spiegazione, analoghe a quelle individuate per la spiegazione S10, sono riportate in tabella.

Caratteristiche S_{12}: Somma di due monomi per la loro differenza pag. 200*		
Campo del discorso	Oggetto	EM_{12}
	Campo sem.	CAlg
	Variaz. Diafasica	-
Modo del	Scopo	J-EM_{12}
	Str. Cognitivi	P→G

Tabella 4: tabella riepilogativa di S_{12}

2.3 Il punto di vista degli insegnanti

L'indagine dal punto di vista degli insegnanti è stata realizzata attraverso interviste e la somministrazione di un breve questionario che miravano a far emergere in che modo gli insegnanti intendono la dimostrazione, la spiegazione e in che modo usano i libri di testo per la loro pratica didattica.
Sono stati contattati individualmente 8 insegnanti di scuola secondaria di secondo grado, in linea con la scelta dei libri che sono stati analizzati. Tali insegnanti provenivano da tre indirizzi scolastici diversi, nello specifico:

- 4 insegnanti di liceo classico,
- 2 insegnanti di liceo artistico,
- 2 insegnanti di liceo pedagogico.

L'intervista mirava sia a far emergere la concezione che avevano le insegnanti sulla spiegazione e sulla dimastrazione e dunque la relazione tra essa, sia a capire se e come i libri di testo incidono sulla pratica dell'insegnante.
Come accennato prima, in questo studio si è tenuta in considerazione l'ipotesi del condizionamento, in particolare sono state fatte ulteriori ipotesi specifiche.
Riassumiamo tali ipotesi nel seguente schema:

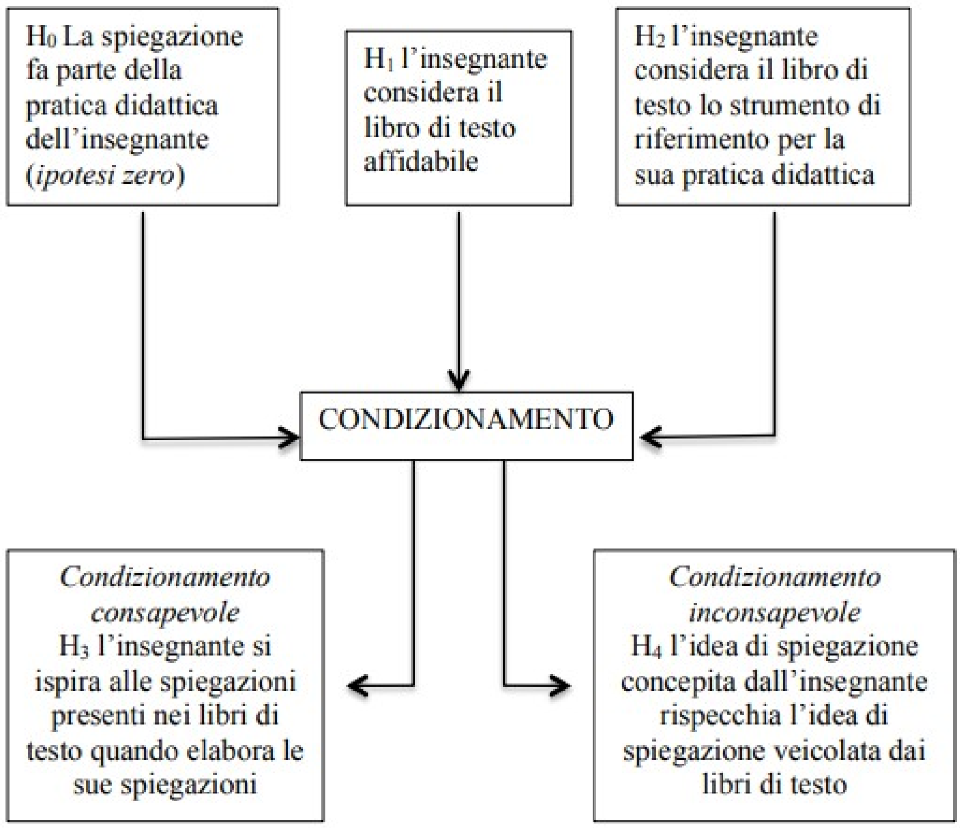


Figura 3: schema che riassume le ipotesi specifiche relative all'ipotesi del condizionamento

Le domande dell'intervista si basano proprio su queste ipotesi. Durante la discussione hanno trattato diversi punti che la Pompili riassume in:

- uso del libro di testo in classe;
- uso del libro di testo per la progettazione delle attività didattiche, in particolare per la preparazione delle spiegazioni;
- attuazione della spiegazione e modificabilità nell'interazione con gli allievi;
- controllo dell'efficacia della spiegazione, in particolare la spiegazione come oggetto di verifica;
- uso della spiegazione per giustificare enunciati;
- uso della dimostrazione per spiegare enunciati;
- aspetti rilevanti dell'insegnamento della dimostrazione.

Successivamente, dopo le domande, ad ogni insegnante è stato somministrato un questionario che mirava a indagare se l'insegnante riconosce una diversità tra i concetti di spiegazione e dimostrazione.
Il questionario presentava un enunciato matematico e sei testi che supportavano la verità dell'enunciato, definendo/ipotizzando una situazione nella quale i testi fossero prodotti da sei studenti in seguito alla richiesta di dimostrare l'enunciato. Tali quesiti riguardavano la dimostrazione sia in ambito algebrico/aritmetico sia in ambito geometrico. Agli insegnanti è stato chiesto di indicare per ciascun testo se dal loro punto di vista fosse classificabile come spiegazione, come dimostrazione o se non fosse riconducibile a nessuna di queste categorie.

L'indagine sul punto di vista degli insegnanti, ha potuto documentare come l'insegnante confidi sui libri di testo per la preparazione delle sue spiegazioni che propone ai suoi studenti. Dunque le criticità rilevate nelle spiegazioni dei manuali, possono riflettersi sulla pratica dell'insegnante. Inoltre, le affermazioni degli insegnanti testimoniano il fatto che la dimostrazione occupa un posto non di rilievo nella loro pratica didattica. In generale

"le indagini che hanno coinvolto gli insegnanti ci hanno permesso di osservare che, benché l'insegnante riconosca una distinzione tra spiegazione e dimostrazione, durante le attività didattiche, egli assume dei comportamenti in cui sembra non tener conto di questo. Egli tende ad usare indistintamente spiegazioni e dimostrazioni per spiegare o per dimostrare, senza preoccuparsi di esplicitare il loro particolare status." (Pompili, 2015, p. 270)

2.4 Un "nuovo" quadro teorico: il progetto MaTeK

Questa tesi si pone l'obiettivo di analizzare parte di un libro di testo considerando, a differenza della Pompili, l'ambito geometrico, ma con un apliamento in un contesto internazionale. Infatti attraverso dei nuovi codici, nati solo nel 2021, dal progetto MaTeK, si può ottenere un miglioramento di quello che la Pompili, nel 2015, ha fatto nel suo lavoro.
MaTeK è un progetto finanziato dal programma di ricerca e innovazione Horizon 2020, ossia un programma di finanziamento della ricerca e dell'innovazione dell'U-

nione Europea.

ABOUT MaTeK

Mathematics has provided the foundations on which all science branches were built and developed. As such, mathematics is and will continue to be an important field of scientific research and education. This creates a need for more efficient and better-trained mathematics teachers, a demand which has not thus far been met. The EU-funded MaTeK project aims to change this. It will focus on developing and improving the Department of Mathematics Education of the Faculty of Mathematics and Physics of Comenius University in Bratislava. The project's actions will allow the department to enhance its practice by cooperating with other successful mathematics departments in various universities.

Objectives

The goal of MaTeK is to provide the DME of Comenius University in Bratislava opportunity to learn from partners, exchange best practices, and establish extensive networks for excellence. MaTeK will twin DME with Departments of Mathematics and Mathematics Education of the following universities: Charles University in Prague, Czech Republic, University of Palermo, Italy, Norwegian University of Science and Technology in Trondheim, Norway, and Middle East Technical University, Turkey. (https://www.projectmatek.eu)

Il progetto MaTek mira a migliorare l'eccellenza della ricerca e le prestazioni in materia di conoscenza degli insegnanti di matematica (Mathematics Teacher Knowledge, MaTeK) dei ricercatori del Dipartimento di Educazione Matematica della Facoltà di Matematica, Fisica e Informatica dell'Università Comenius di Bratislava (FMPI CU). La qualità complessiva del team slovacco è già riconosciuta a livello nazionale e internazionale. Il Dipartimento di Didattica della Matematica della FMPI CU (DME) è inoltre noto come l'istituzione leader i cui insegnanti e ricercatori sono autori di libri di testo di matematica per le scuole secondarie inferiori e superiori.
Ma risultati di caratura internazionali, come PISA, mostrano che il punteggio degli studenti slovacchi in matematica è da tempo inferiore alla media OCSE. Questo risultato potrebbe evocare una discussione sulla qualità del sistema educativo e sulle conseguenze degli scarsi investimenti a lungo termine nell'istruzione e della remunerazione estremamente scarsa degli insegnanti e dei formatori (Centro europeo per lo

sviluppo della formazione professionale, 2014).

MaTeK affronta questi problemi attraverso un gemellaggio tra la FMPI CU e quattro importanti istituzioni riconosciute a livello internazionale: l'Università Carlo di Praga (CUP), l'Università di Palermo (UP), l'Università norvegese di scienza e tecnologia di Trondheim (NTNU) e l'Università tecnica del Medio Oriente (METU).

Figura 4: logo del progetto internazionale MaTeK

MaTeK si propone di fornire il prossimo passo nello sviluppo del DME in relazione al rafforzamento significativo del suo profilo di ricerca, alla stimolazione della sua eccellenza scientifica, alle prestazioni e alla capacità di innovazione nel campo della conoscenza degli insegnanti di matematica, che sarà l'argomento della ricerca congiunta. Nel compiere questo passo, è necessario affrontare diverse questioni chiave che attualmente limitano tale crescita:

1. Una valutazione critica delle infrastrutture necessarie per sviluppare un'istituzione di successo, eccellente e riconosciuta a livello internazionale. L'infrastruttura comprende sia le strutture che il personale, con un'enfasi particolare sul tutoraggio e la formazione del personale a tutti i livelli (dal master/dottorato di ricerca fino alla laurea specialistica), con particolare attenzione allo sviluppo di tutte le sottocategorie di conoscenze matematiche per l'insegnamento e, di conseguenza, all'aumento delle prestazioni di ricerca nel campo definito.

2. Conoscenza e adozione delle "migliori pratiche" nell'area di ricerca della conoscenza degli insegnanti di matematica da parte di tutti i partner e sviluppo di un piano strategico a lungo termine per una più stretta collaborazione e networking, che si traduce in un maggior numero di pubblicazioni scientifiche.

Inoltre, le attività di gemellaggio di MaTeK sono finalizzate a colmare le lacune e le carenze tra gli istituti di ricerca dei partner, con l'obiettivo di migliorare l'eccellenza della ricerca di tutti. Infatti, questa azione di gemellaggio sarà solo un punto di partenza per ulteriori attività e cooperazioni tra i partner del progetto. Infatti l'obiettivo principale di questo progetto è la creazione di ampie reti di eccellenza con il risultato di rafforzare i risultati della ricerca attraverso il trasferimento di conoscenze e competenze e lo scambio di buone pratiche nel campo della conoscenza degli insegnanti di matematica.
MaTeK opera attraverso quattro pacchetti di lavoro (WP) ben definiti:

- WP1: "Gestione del progetto" coordinerà il progetto e stabilirà le modalità operative e di rendicontazione.

- WP2: "Costruire l'eccellenza scientifica e le strutture di ricerca" è dedicato a migliorare la qualità della ricerca intrapresa dal personale del DME (Dipartimento di Didattica della Matematica della FMPI CU) attraverso la formazione e la condivisione delle competenze scientifiche e delle migliori pratiche tra i partner.

- WP3: "Divulgazione dei risultati e dell'impatto" è dedicato ad aumentare la visibilità della DME e della FMPI CU nella comunità internazionale, mettendo in evidenza MaTeK come esempio di partenariato di gemellaggio.

- WP4: "Sostenibilità" sviluppa una "roadmap" per lo sviluppo del DME/FMPI CU e del consorzio dopo il programma MaTeK nel periodo 2023-2028.

Come detto prima,uno degli obiettivi principali di MaTeK è la creazione di ampie reti di eccellenza attraverso il partenariato di ricerca con CUP, UP, NTNU e METU. Per raggiungere questo obiettivo, MaTeK sosterrà una serie di scambi scientifici a breve termine (coordinati attraverso il WP2). Queste conferenze e workshop sono rivolti non solo a ricercatori/formatori ma anche ad insegnanti in servizio e studenti della facoltà di matematica, infatti si ritiene, visto che rappresentano la nuova generazione di insegnanti, che sia essenziale incorporare anche loro come gruppo target. MaTeK, dunque, mirerà anche a far conoscere a questi studenti modi innovativi e moderni di creare lezioni di matematica nel loro futuro lavoro a scuola. Al termine dei loro studi, così, saranno in grado di riportare nelle scuole i concetti innovativi che hanno appreso e di cambiare il modo in cui gli insegnanti tradizionali lavorano "dal basso

verso l'alto", scambiando le loro idee con i colleghi che non hanno avuto la possibilità di partecipare alla formazione.
Ci si aspetta dei risultati importanti da questo progetto, l'impatto principale sarà quello di aumentare l'eccellenza della ricerca e lo status internazionale del DME presso la FMPI CU, obiettivo in parte già raggiunto dopo 15 mesi, e di rafforzare la cooperazione internazionale tra i partecipanti.

2.4.1 Analisi di libri di testo di scuola secondaria in contesti internazionali

Durante questi scambi, i ricercatori di diverse università hanno discusso, e stanno ancora coopererando su un campione considerevole di ricerca educativa (studi nazionali e comparativi). Una di queste ricerche riguarda l'analisi dei libri di testo.
Nello specifico, sulla base del background teorico, ogni partner ha analizzato problemi selezionati dal libro di testo di matematica di grado 8 (la nostra scuola scuola media) al fine di testarlo e migliorarlo.
Il background teorico, riguarda la suddivisione e il riconoscimento dei vari tipi di ragionamento matematico. Sono stati analizzati 8 modi di ragionare:

1. Generalizzazione da casi specifici (ragionamento induttivo);
2. Valutare le affermazioni matematiche (ad esempio, confutandole con controesempi);
3. Sviluppare conclusioni attraverso il ragionamento deduttivo;
4. Ragionamento per analogia (trasferimento di informazioni strutturali da un sistema a un altro - ad esempio, trasferimento della struttura dei manipolativi al contesto astratto);
5. Ragionare con le immagini (ad esempio, scomposizione di forme geometriche nel processo di giustificazione/prova);
6. Valutare la pertinenza di un modello matematico in una situazione realistica;
7. Creare collegamenti tra diverse rappresentazioni (visive, simboliche, verbali, contestuali, fisiche);

8. Fare previsioni in situazioni stocastiche (ad esempio, valutare affermazioni o informazioni fornite dai media).

Ogni partner ha analizzato problemi selezionati dal libro di testo nazionale di matematica, soffermandosi soprattutto sui problemi di Reasoning and Proof (RP); per rendere la ricerca omogenea e facilmente confrontabile, è stata preparata una lista dei codici utilizzabili da tutti i partner:

Type of Problem	Purpose of RP Problem
• Introductory task	• Making claims
• Student task	• Justifying claims
• Extension (enrichment, extra practice,...)	• Making claims and justifying claims
• Assessment (test, assessment,...)	• Evaluating justifications

Tabella 5: tabella riepilogativa dei tipi di problemi R&P

Un compito risolto di RP è una parte di testo scritto, in cui è possibile identificare
a) un'affermazione matematica e
b) l'argomentazione a sostegno di questa affermazione .
Un'affermazione matematica può essere sia la risposta a un problema matematico (della vita reale), sia il risultato di una "matematizzazione" o un'affermazione matematica (generale). Se a) e b) sono chiari, non è necessario che il compito sia formulato in modo tradizionale (come un comando).
L'analisi si è svolta in quattro fasi:

- La prima fase della codifica: identificare i problemi che contenevano le seguenti parole chiave e frasi: spiegare, scrivere una regola, dire perché, perché, provare, dimostrare, giustificare ecc.

- La seconda fase: assegnazione del codice del tipo di problema (Compito introduttivo, Compito dello studente, Estensione, Valutazione).

- La terza fase: interpretazione degli spunti contestuali in un problema per determinare lo scopo del problema (Formulare affermazioni, Giustificare le affermazioni, Valutare le giustificazioni).

- La quarta fase: assegnazione del codice del tipo di ragionare (8 modi diversi di RP) → necessità di esempi di 8 modi di RP, questo può essere fatto solo per problemi risolti, c'è una mancanza di tali problemi in alcuni libri di testo, l'analisi dei problemi irrisolti nei libri di testo in questa fase non è ottimale.

Per l'analisi di tutti i dati, i parten hanno utilizzato una tabella, detta tabella dei codici, che fa riferimento alle tipologie di ragionamento che si trovano nei libri di testo.

Way of reasoning/specification	**R** Using at least 2 different representations Not compulsory: graphical (G), symbolic (S), verbal (V), real-world situations (R), manipulatives (M)		**T** Using (digital) **t**echnology (e.g., calculator, Geogebra, math apps, ...)	
	yes	no	yes	no
1. Appeal to authority				
2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, ...)				
3. Mathematization (with explained steps)				
4. Reasoning by analogy				
5. Reasoning with empirical arguments/specific cases				
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning *(extra note if a generic example is used,* *extra note if a counterexample is used,* *extra note if a systematic enumeration is used)*				
7. None of the previous				
Other (abductive reasoning, etc.) * *only for the intervention part!*				

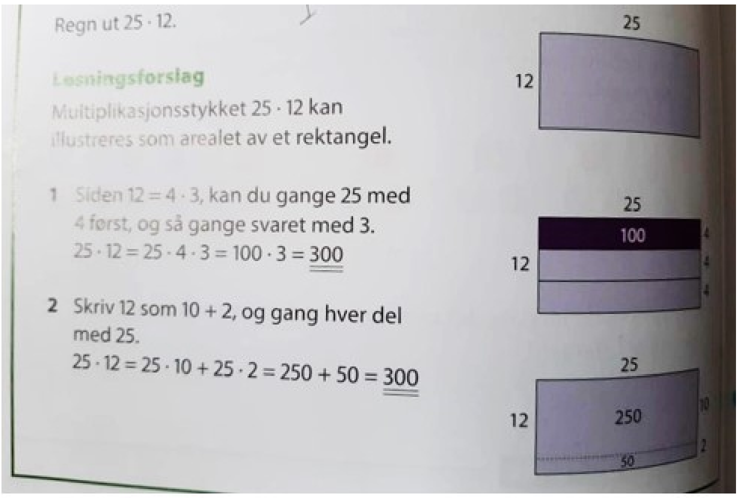
Tabella 6: tabella dei codici in cui i modi di ragionare analizzati nei libro di testo vengono categorizzati

Dove per "appello all'autorità" si intende un ragionamento che si basa su un informazione esterna fornita da una figura di autorità (ad esempio, Euclide, un insegnante, un genitore, un libro di testo, Internet, ...); nella seconda categoria si trova il ragionamento a priori, ragionamento più elementare, magari attraverso l'utilizzo di esempi; la terza si presenta come processo di matematizzazione di contesti reali che vengono trasferiti in contesti matematici; la quinta dato un ragionamento empirico quindi basato su tentativi o comunque basato su un'osservazione dei dati; e nella sesta categoria vi è una risoluzione di un problema attraverso un ragionamento deduttivo.

Esiti della ricerca condotta in ambito internazionale

Adesso vediamo vari esempi estrapolati nelle ricerche dei diversi partner:

ESEMPIO 1 :



Regn ut 25 · 12.

Løsningsforslag

Multiplikasjonsstykket 25 · 12 kan illustreres som arealet av et rektangel.

1 Siden 12 = 4 · 3, kan du gange 25 med 4 først, og så gange svaret med 3.
25 · 12 = 25 · 4 · 3 = 100 · 3 = 300

2 Skriv 12 som 10 + 2, og gang hver del med 25.
25 · 12 = 25 · 10 + 25 · 2 = 250 + 50 = 300

Figura 5: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 norvegese

Questo problema è stato estratto da un libro di testo norvegese.

La richiesta di questo problema viene fatta come un comando;

Ragionando sulla soluzione: Calcolare 25x12.

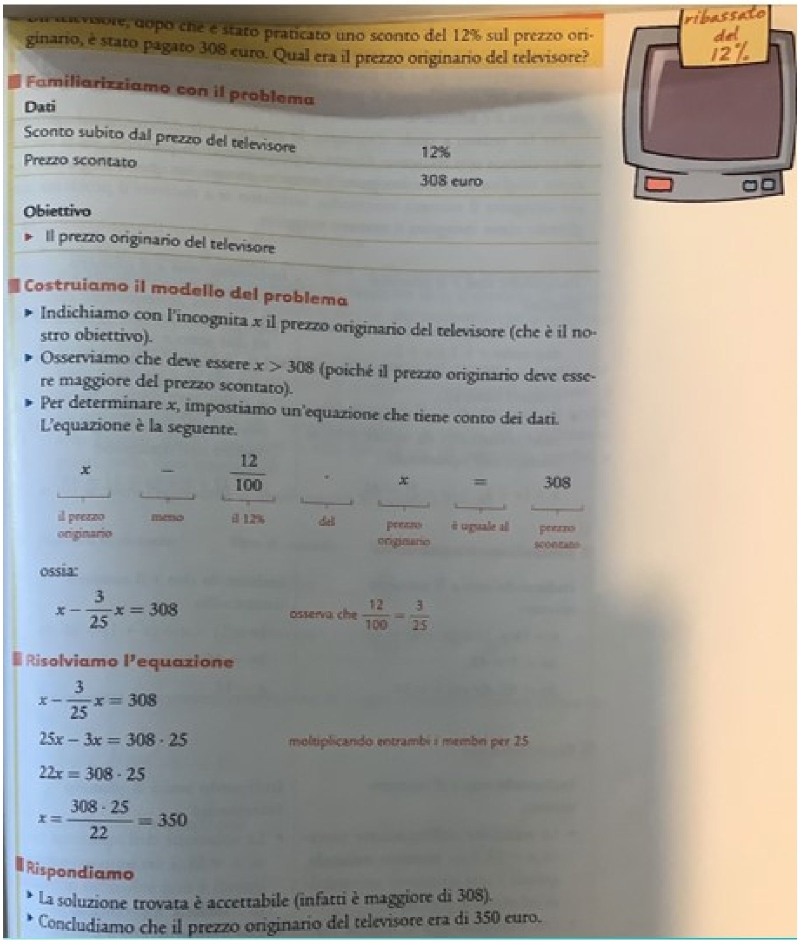
Nella soluzione proposta si utilizza il modello dell'area per spiegare come si possa calcolare 25x12 come 25x4x3 o come 25x10 + 25x2, dunque si presuppone che da parte dell'alunno venga fatto un ragionamento.

D'altra parte, se un problema irrisolto viene indicato come "calcola...", non abbiamo modo di sapere se lo studente sarà indotto a fornire un ragionamento, quindi la formulazione del testo ha un ruolo cruciale.

Possiamo considerare questo problema come di estensione, in quanto si cerca di capire se lo studente riesce ad utilizzare le nozioni teoriche da un punto di vista "pratico".

Il tipo di ragionamento fatto è per immagini perchè si utilizza una rappresentazione geometrica nel processo di giustificazione.

ESEMPIO 2



...visore, dopo che è stato praticato uno sconto del 12% sul prezzo originario, è stato pagato 308 euro. Qual era il prezzo originario del televisore?

Familiarizziamo con il problema

Dati

Sconto subito dal prezzo del televisore	12%
Prezzo scontato	308 euro

Obiettivo

- Il prezzo originario del televisore

Costruiamo il modello del problema

- Indichiamo con l'incognita x il prezzo originario del televisore (che è il nostro obiettivo).
- Osserviamo che deve essere $x > 308$ (poiché il prezzo originario deve essere maggiore del prezzo scontato).
- Per determinare x, impostiamo un'equazione che tiene conto dei dati. L'equazione è la seguente.

$$\underbrace{x}_{\text{il prezzo originario}} \underbrace{-}_{\text{meno}} \underbrace{\frac{12}{100}}_{\text{il 12\%}} \underbrace{\cdot}_{\text{del}} \underbrace{x}_{\text{prezzo originario}} \underbrace{=}_{\text{è uguale al}} \underbrace{308}_{\text{prezzo scontato}}$$

ossia:

$$x - \frac{3}{25}x = 308 \qquad \text{osserva che } \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

Risolviamo l'equazione

$$x - \frac{3}{25}x = 308$$

$$25x - 3x = 308 \cdot 25 \qquad \text{moltiplicando entrambi i membri per 25}$$

$$22x = 308 \cdot 25$$

$$x = \frac{308 \cdot 25}{22} = 350$$

Rispondiamo

- La soluzione trovata è accettabile (infatti è maggiore di 308).
- Concludiamo che il prezzo originario del televisore era di 350 euro.

Figura 6: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 italiano

Questo è un problema estratto da un libro di testo italiano.

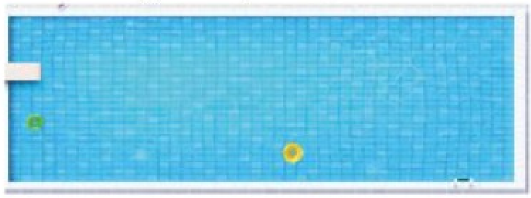
È stato applicato uno sconto del 12% a un televisore. È stato pagato 308 euro. Qual era il prezzo originale del televisore?

L'autore scrive l'equazione (come soluzione di un compito) e spiega/giustifica perché ci sono termini specifici nella stessa equazione.

Questo problema viene risolto altraverso un processo di matematizzazione.

ESEMPIO 3

Problem 3:
The side lengths of the given pool below are x cm and 3x+4 cm. If the base of the given pool is rectangular region, then write the algebraic expression that shows the base area of the pool.



Solution:
2nd way:
To find the area of the base of rectangular pool, let's multiply the side legnths of the base.

$$x \cdot (3x+4) = x \cdot 3x + 4 \cdot x$$ *Use the disributive property multiplication over addtion*
$$= 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x$$ *Rewrite as $x.x=x^2$*

The area of the base of the pool = $3x^2 + 4x$ cm^2

Figura 7: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 turco

Questo è un problema estrapolato da un manuale turco.
Si tratta di una deduzione molto semplice, a un solo passo; un'argomentazione breve. Questo ragionamento costituisce pietre fondamentali che sono importanti nella matematica scolastica. Può riguardare i seguenti casi: Uso di definizioni/notazioni; Applicazione di formule; Lettura di grafici/tabelle.
Il ragionamento dunque sta nel valutare la pertinenza di proprietà matematiche in una situazione realistica.
Riportiamo di seguito altri esempi di item di libri di testo definiti in accordo con il quadro teorico.

2. Simple (1 step) deduction (Norwegian)

Example
Examine whether x = 12 is a correct solution of equation x + 7 = 2x -5.

Suggested solution

Left side	Right side
$x + 7 =$	$2x - 5 =$
$12 + 7 =$	$2 \cdot 12 - 5 =$
$\underline{19}$	$24 - 5 =$
	$\underline{19}$

Both sides of the equation have a value of 19. This means that x = 12 is the correct solution of the equation.

Figura 8: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 norvegese

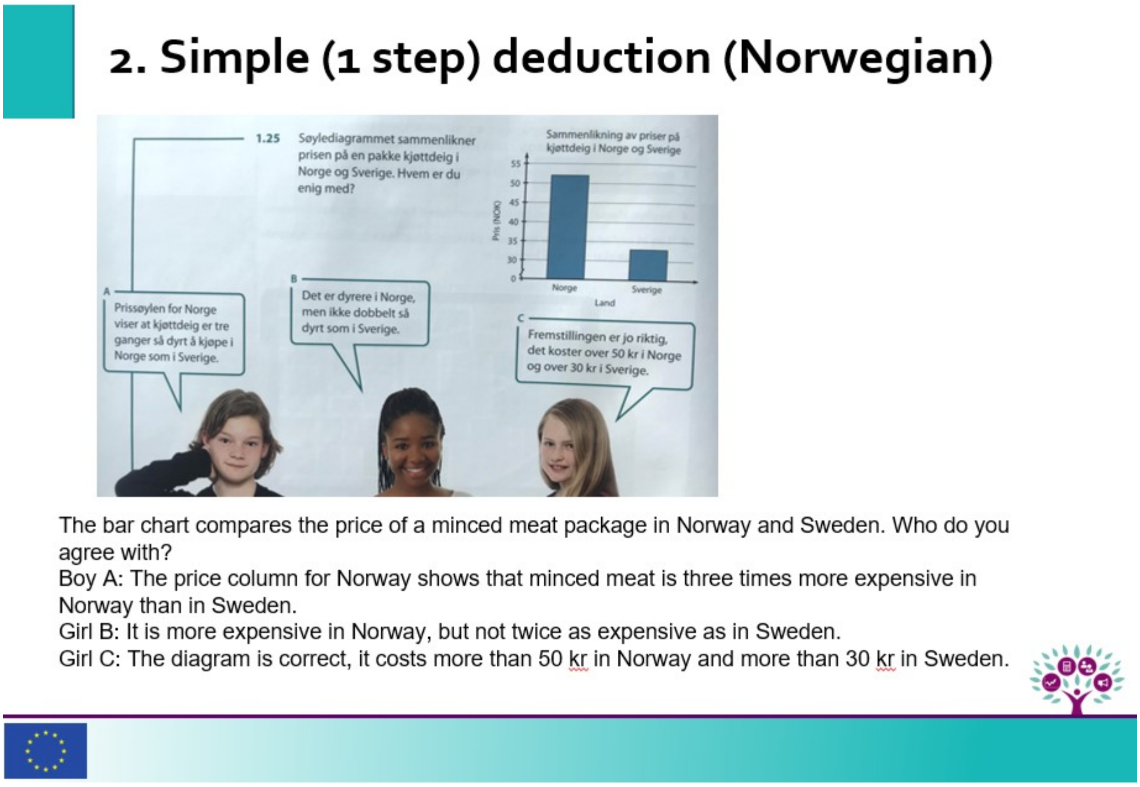


Figura 9: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 norvegese

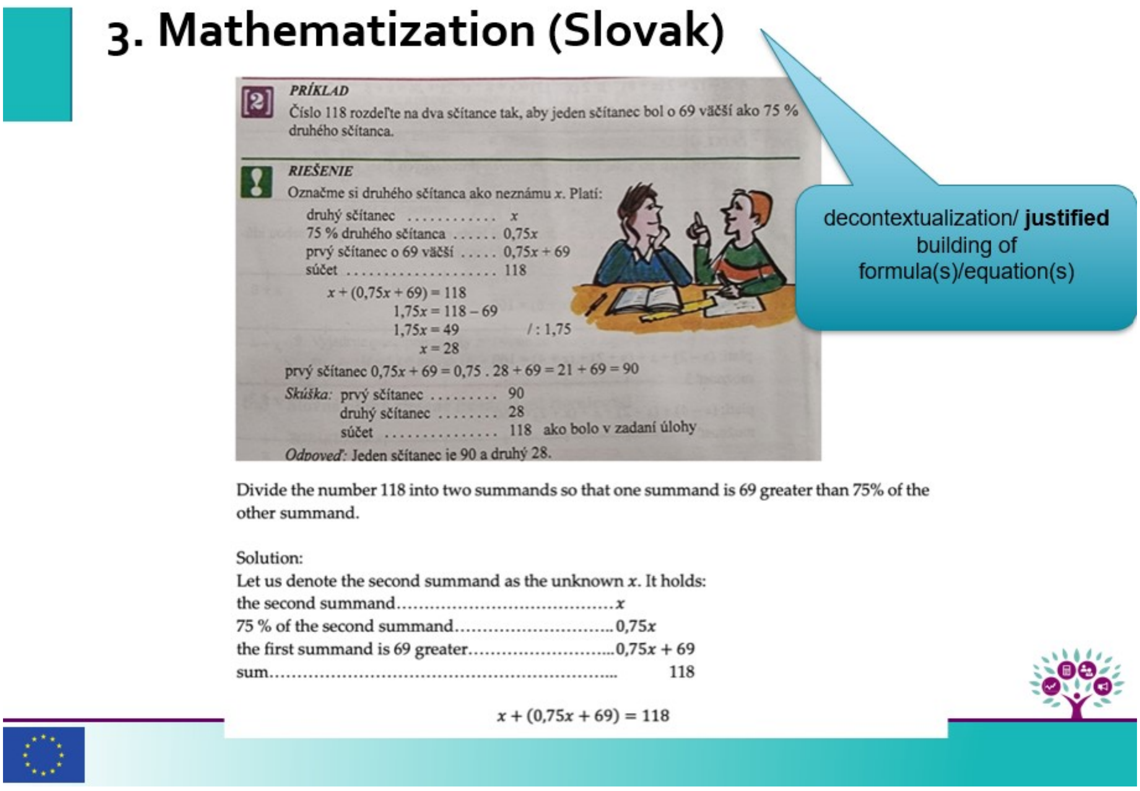


Figura 10: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 slovacco

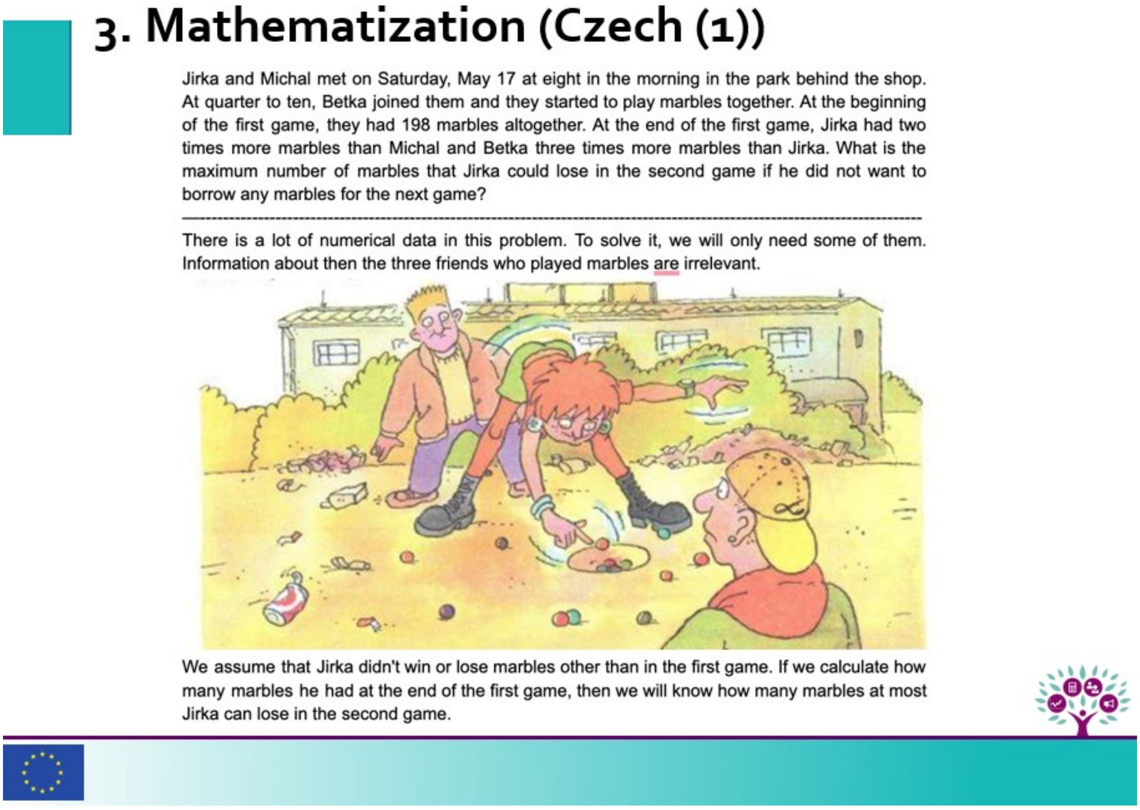


Figura 11: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 ceco

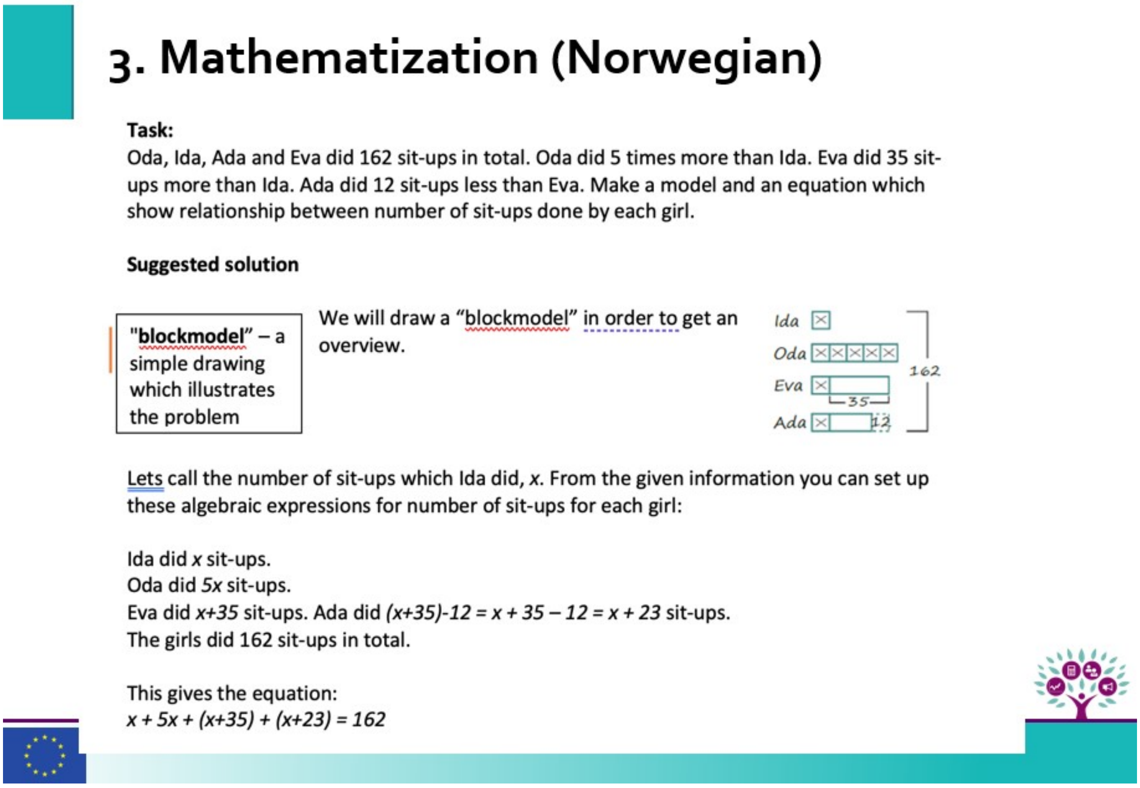


Figura 12: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 norvegese

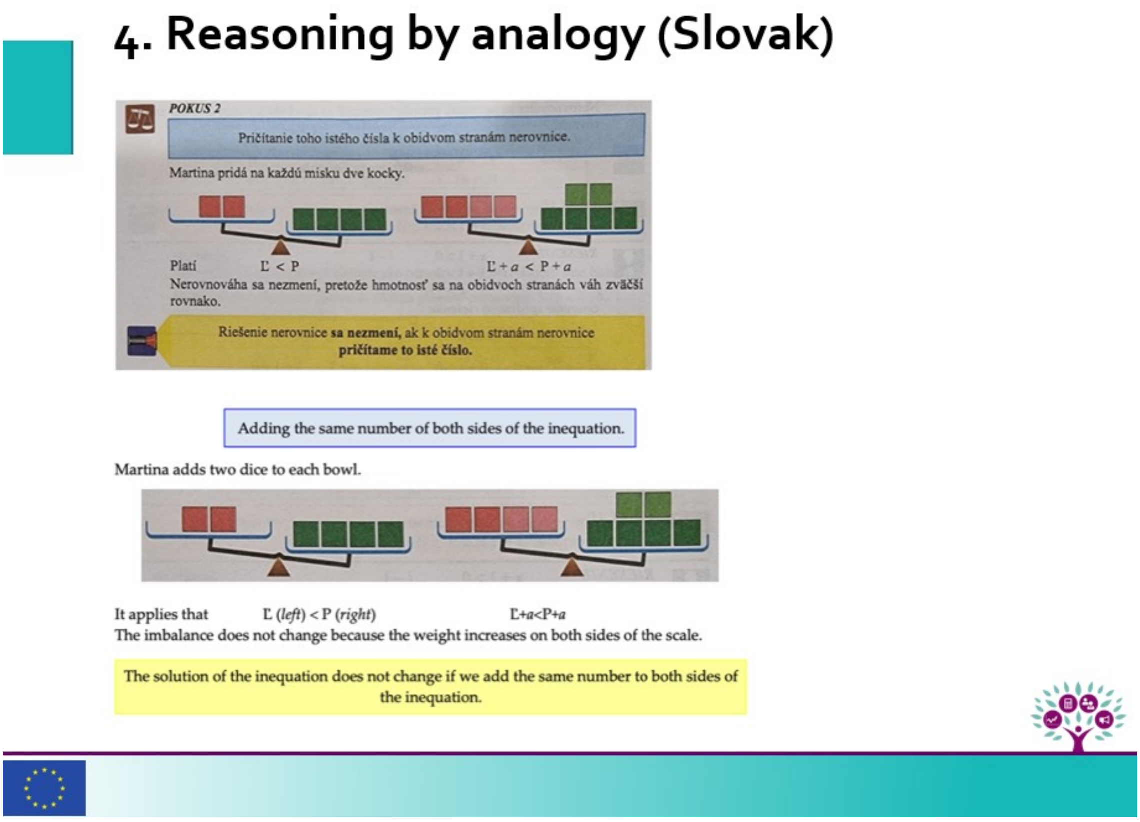


Figura 13: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 slovacco

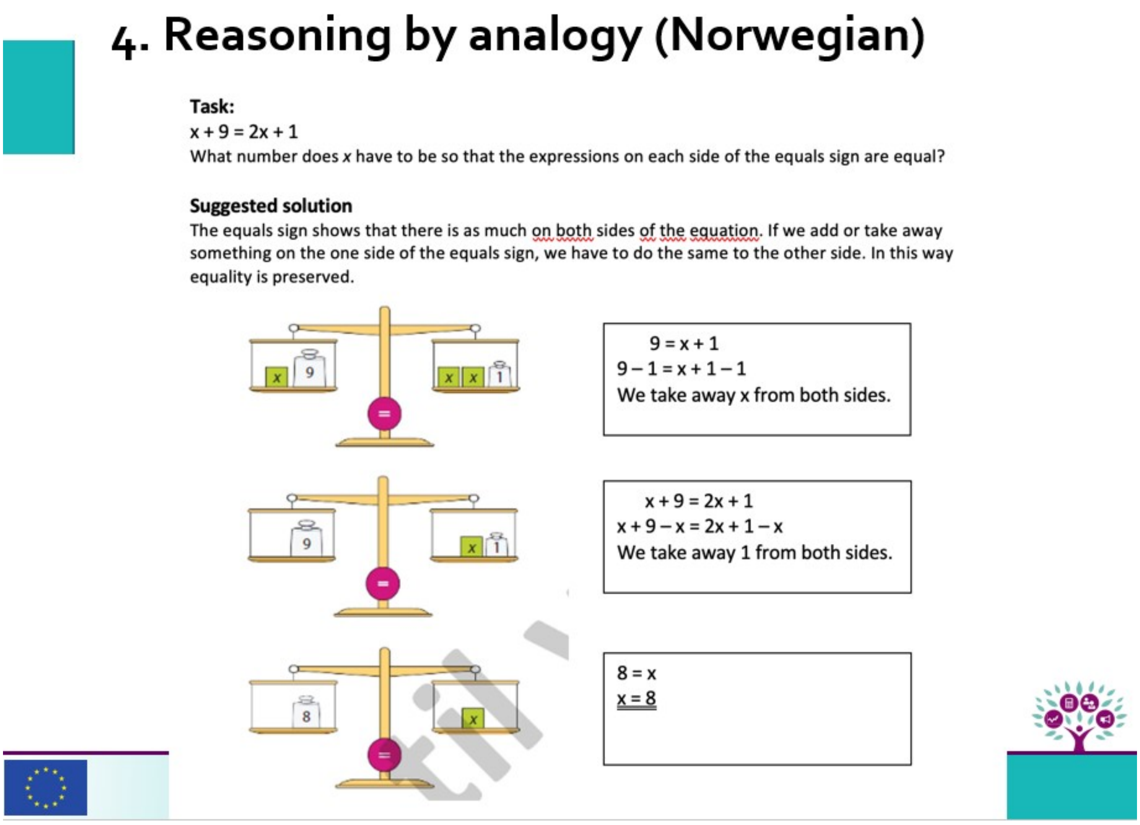


Figura 14: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 norvegese

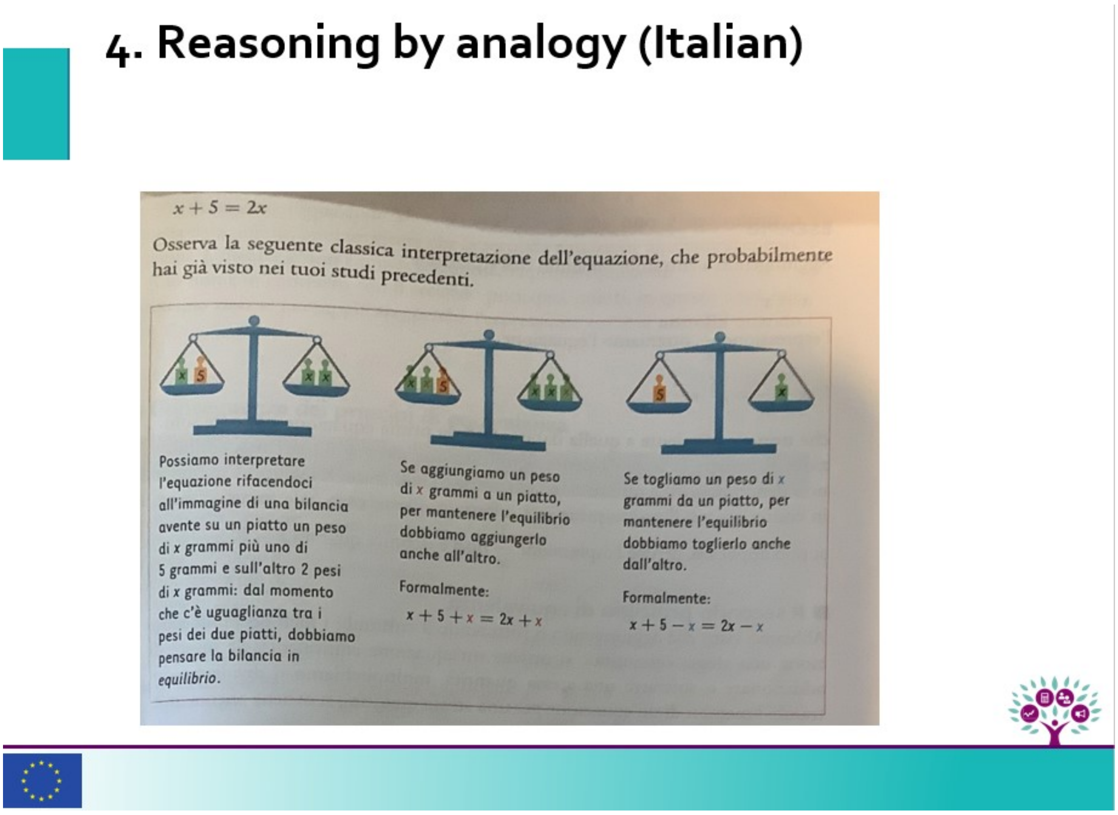


Figura 15: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 italiano

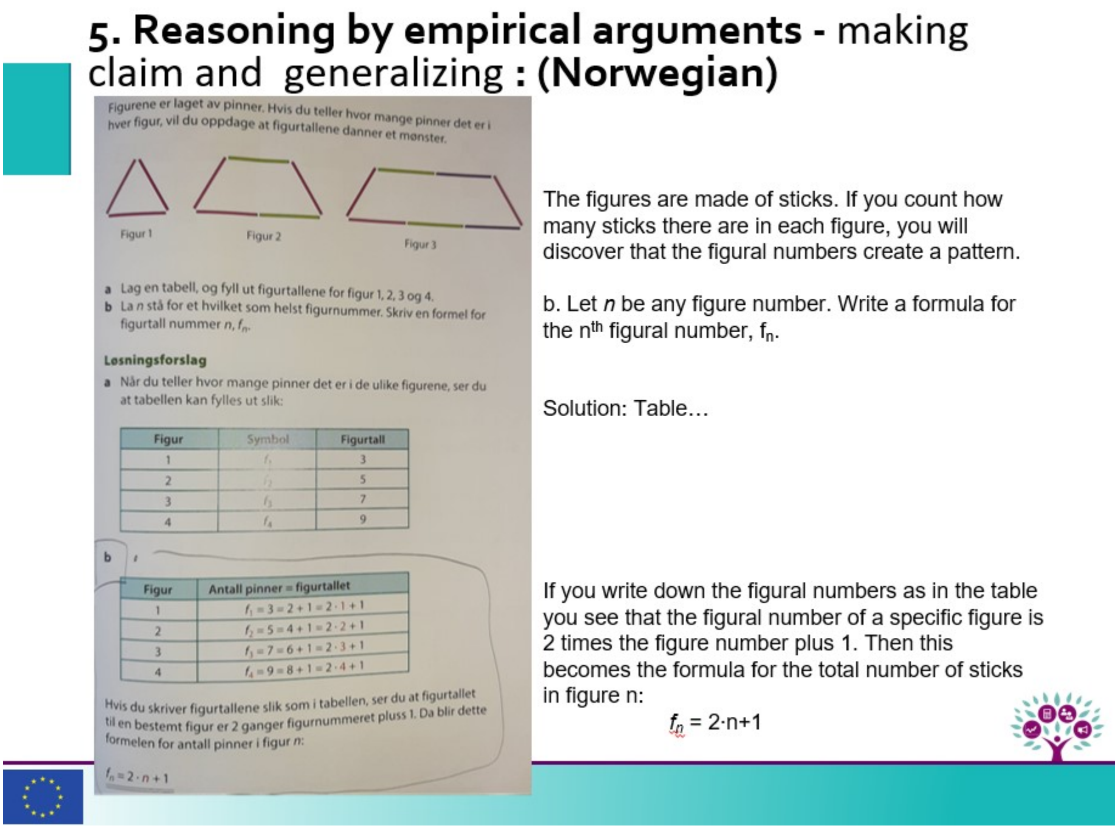


Figura 16: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 norvegese

5. **Reasoning by empirical arguments** - making claim and generalizing (through experimental demonstration)(**Czech**)

Problem: The picture shows three right triangles. Use protractor and ruler to make sure these triangles are really right and that the following table shows right lengths of its sides. Then draw three additional triangles and fill in the table for these.

Compare square power of hypotenuse length (c) with sum of square powers of legs lengths (a,b).

Solution:

	$a\ (mm)$	$b\ (mm)$	$c\ (mm)$	$a^2\ (mm)$	$b^2\ (mm)$	$c^2\ (mm^2)$	$a^2+b^2\ (mm^2)$
A)	51	68	85	2601	4624	7225	7225
B)	87	87	124	7569	7569	15 138	15 376
C)	17	103	104	289	10 609	10 816	10 898

Results of measurement in last two columns of the table show that square power of measured length of hypotenuse (c^2) is always equal or nearly equal to sum of two leg sides squares measured ($a^2 + b^2$). Some numbers in last two columns are not exactly equal because we always make mistakes while measuring.

Figura 17: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 ceco

5. **Reasoning by specific cases –** justifying claim (Italian)

If in a rectangle the base is halved and the height is doubled, is it true that the area remains unchanged? If in a rectangle you decrease the length of the base by 20% and increase the height of the same by 20%, is it true that the area remains the same?

The Author starts observing a special case.

We can try to get closer to the answer to the problem starting to examine what happens in a particular case.

… The Author considers the case of a rectangle 10X5

a) Based on the results we can assume that by halving the base and doubling the height, the area remains unchanged.
b) Decreasing the base by 20% and increasing the height by 20% the area decreases.

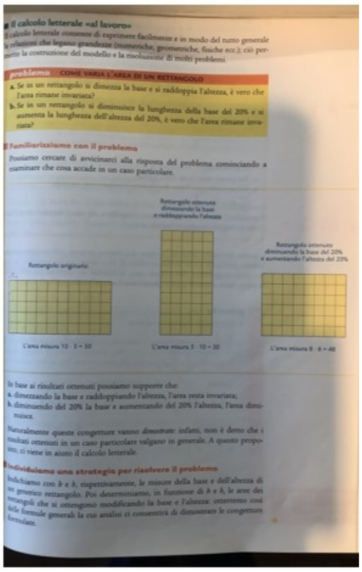


Figura 18: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 italiano

6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through **deductive reasoning** (Turkish)

Problem 4:

Let's Learn

Two natural numbers that do not have any common factor other than 1 are called relatively prime numbers.

- If GCF of two numbers is 1, then these numbers are relatively prime numbers.
- LCM (Least Common Multiple) of two relatively prime numbers is equal to the product of these two numbers.
- For two numbers to be relatively prime, these are not necessarily be prime numbers.

Problem

Decide whether 10 and 27 are relatively prime.

Solution

To find whether these numbers are relatively prime, let's find GCF.

10	27	2
5	27	3
5	9	3
5	3	3
5	1	5
1		

GCF (10, 27) = 1

Since 10 and 27 do not have a common factor other than 1, they are relatively prime.

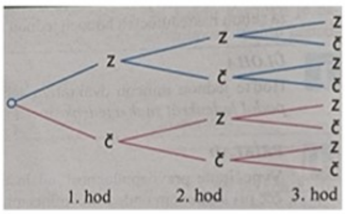
Figura 19: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 turco

6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through **deductive reasoning** (Slovak)

Peter has to toss a coin three times. He had already taken one throw and got a tail (č). What is the probability that he will get at least one head (z) in the remaining two throws?

Solution:

Let's start from the tree diagram.



If Peter got a tail (č) in the first throw, so we got to the bottom part of our diagram, from which all possible outcomes can be read, provided that a tail (č) fell on the first roll. They are: *čzz, čzč, ččz, ččč*. Of these four possibilities, the following are favorable to us: *čzz, čzč, ččz*. Then the probability of the event that we got at least one head (z) in the remaining two throws when a tail fell on the first roll is $\frac{3}{4} = 75\ \%$.

Figura 20: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 slovacco

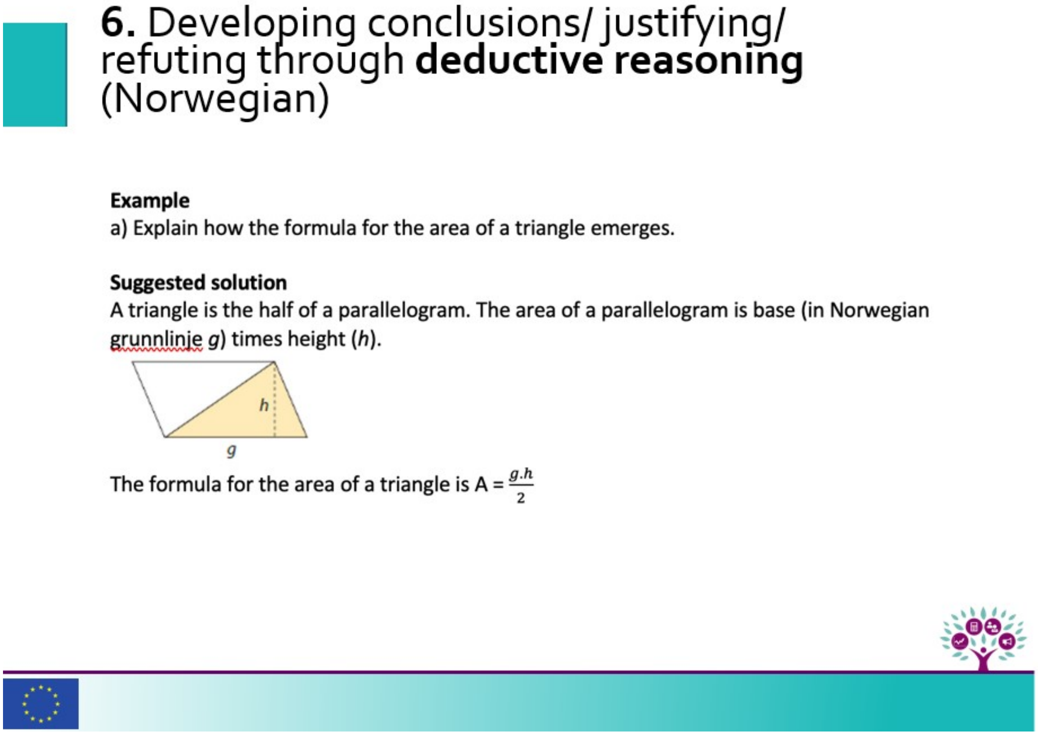


Figura 21: esempio tratto da un libro di testo di grado 8 norvegese

Statistiche internazionali

In 15 mesi di attività, le cinque equipe delle università partner sono riuscite ad analizzare il libro di testo più usato della loro nazione, ed ad ottere dei dati importati per le ricerche future.

Confrontando infatti i risultati nazionali con quelli internazionali, tutti i gruppi potranno individuare nuovi metodi per migliorare il lavoro in classe.

Di seguito vengono riportate le tabelle dei codici dei vari paesi in accordo con il nuovo quadro teorico descritto. Il lavoro riguardante l'Italia verrà riportato per ultimo.

Way of reasoning/specification	**R** Using at least 2 different **r**epresentations Not compulsory: graphical (G), symbolic (S), verbal (V), real-world situations (R), manipulatives (M)		**T** Using (digital) **t**echnology (e.g., calculator, Geogebra, math apps, ...)	
	yes	no	yes	no
1. Appeal to authority				
2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, ...)	27			
3. Mathematization (with explained steps)	35			
4. Reasoning by analogy				
5. Reasoning with empirical arguments/specific cases	44			
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning *(extra note if a generic example is used, extra note if a counterexample is used, extra note if a systematic enumeration is used)*	10		1	
7. None of the previous				
Other (abductive reasoning, etc.) * *only for the intervention part!*				

Tabella 7: tabella dei codici turca

In questo caso, il 37,61% dei problemi risolti con R&P è caratterizzato da caretteri empirici; il 29,91% riguarda problemi che partono da un problema reale e poi risolti attraverso un processo di matematizzazione; il 23,08% problemi semplici, per questi detti anche one step, risolti a priori; ed infine l'8,55% risolti con un'argomentazione di tipo deduttivo.

Way of reasoning/specification	**R** Using at least 2 different representations Not compulsory: graphical (G), symbolic (S), verbal (V), real-world situations (R), manipulatives (M)		**T** Using (digital) **t**echnology (e.g., calculator, Geogebra, math apps, ...)	
	yes	no	yes	no
1. Appeal to authority				
2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, ...)	**13**	**32**		
3. Mathematization (with explained steps)	**4**			
4. Reasoning by analogy	**10**			
5. Reasoning with empirical arguments/specific cases	**14**	**3**		
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning *(extra note if a generic example is used,* *extra note if a counterexample is used,* *extra note if a systematic enumeration is used)*	**4**	**19**		
7. None of the previous				
Other (abductive reasoning, etc.) * *only for the intervention part!*				

Tabella 8: tabella dei codici norvegese

In questo caso, più del 45% dei problemi di R&P sono a priori, inoltre circa il 23% dei problemi viene risolto attraverso l'uso di un ragionamento deduttivo.

Way of reasoning/specification	**R** Using at least 2 different representations Not compulsory: graphical (G), symbolic (S), verbal (V), real-world situations (R), manipulatives (M)		**T** Using (digital) technology (e.g., calculator, Geogebra, math apps, ...)	
	yes	**no**	**yes**	**no**
1. Appeal to authority				
2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, ...)	34	32		
3. Mathematization (with explained steps)	18		1	
4. Reasoning by analogy	3			
5. Reasoning with empirical arguments/specific cases	1	3		
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning *(extra note if a generic example is used,* *extra note if a counterexample is used,* *extra note if a systematic enumeration is used)*	70 (1 times generic example)	1		*if drawing (using ruler and compass) is a technology, then 3 of 70 items are using technology*
7. None of the previous				
Other (abductive reasoning, etc.) * *only for the intervention part!*				

Tabella 9: tabella dei codici slovacca

I libri di testo slovacchi sono quelli che contengono più problemi di R&P risolti, 162. Si osserva che vi è una particolare attenzione per i problemi di tipo deduttivo che rappresentano il 43,83% del totale.

Way of reasoning/specification	**R** Using at least 2 different representations Not compulsory: graphical (G), symbolic (S), verbal (V), real-world situations (R), manipulatives (M)		**T** Using (digital) **t**echnology (e.g., calculator, Geogebra, math apps, ...)	
	yes	**no**	**yes**	**no**
1. Appeal to authority	1	2		
2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, ...)	23	10		
3. Mathematization (with explained steps)	7			
4. Reasoning by analogy	2	10		
5. Reasoning with empirical arguments/specific cases	20		1	
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning *(extra note if a generic example is used,* *extra note if a counterexample is used,* *extra note if a systematic enumeration is used)*	30	1		
7. None of the previous	15	1		
Other (abductive reasoning, etc.) ** only for the intervention part!*				

Tabella 10: tabella dei codici ceca

Anche in questo caso, come per le due nazioni precedenti, per la risoluzione dei problemi si utilizza soprattutto il ragionamento a priori e quello deduttivo.

Way of reasoning/specification	**R** Using at least 2 different **r**epresentations Not compulsory: graphical (G), symbolic (S), verbal (V), real-world situations (R), manipulatives (M)		**T** Using (digital) **t**echnology (e.g., calculator, Geogebra, math apps, ...)	
	yes	**no**	**yes**	**no**
1. Appeal to authority				
2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, ...)	**38**	**26**		
3. Mathematization (with explained steps)	**28**			
4. Reasoning by analogy	**4**			
5. Reasoning with empirical arguments/specific cases	**16**			
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning *(extra note if a generic example is used,* *extra note if a counterexample is used,* *extra note if a systematic enumeration is used)*	**11**	**4**		
7. None of the previous				
Other (abductive reasoning, etc.) * *only for the intervention part!*				

Tabella 11: tabella dei codici italiana

In questo caso, il 50,39% dei problemi R&P viene risolto con un ragionamento a priori del tipo one step, inoltre soltanto l'11,81% degli esempi viene risolto con un ragionamento di tipo deduttivo. Questo determina una differenza sostanziale con le altre nazioni quali la Norvegia ma soprattutto la Slovacchia.

In questa tesi sono state fatte delle analisi dei dati per mettere in risalto i risultati ottenuti dallo studio svolto dall'equipe dell'Università di Palermo.
Poiché i manuali indicati si compongono di due volumi, algebra e geometria, lo

studio ha seguito la stessa suddivisione. Il campione di ricerca consisteva in 4096 problemi di algebra e 1589 problemi di geometria.
Lo studio si è orientato principalmente sui problemi di Reasoning and Proof poichè si ritiene che siano più utili per la formazione dello studente, in quanto inducono ad una forma di ragionamento piuttosto che un'esecuzione meccanica di istruzioni.
In virtù di questo, abbiamo estrapolato dei valori a nostro parere significativi che sono descritti nella seguente tabella.

Book	UBI MATH Matematica per il tuo futuro - Algebra	UBI MATH Matematica per il tuo futuro - Geoemtria 3
Tot RP/Tot Problems	31,15%	17,56%
Solved RP/Tot RP	6,43%	16,13%
Solved RP/Tot Problems	2,00%	2,83%

Tabella 12: percentuali importanti riguardo i risultati ottenuti analizzando, sia l'ambito algebrico che geometrico, di un libro di testo italiano

Nello specifico abbiamo messo a confronto il numero totale dei problemi RP (risolti e non risolti) con il numero totale di esercizi, osservando che soltanto una piccola parte dei problemi proposti è del tipo RP. Questo dato si fa ancora più significativo se andiamo ad osservare i dati del libro di geometria, infatti, soltanto il 17,56% dei problemi è di questo tipo. Un dato che sicuramente evidenzia alcune carenze di questo libro di testo, è la pencentuale dei problemi RP risolti in confronto alla totalità dei problemi, infatti in entrambi i volumi tale dato è inferiore al 3%.
Per avere una visione internazionale dei dati, abbiamo messo a confronto i risultati delle diverse equipe.

	ITALIA	TURCHIA	NORVEGIA	SLOVACCHIA	REP. CECA
TOTAL (solved + unsolved)	5685	903	1190	2456	697
Solved %	6,97%	22,59%	10,92%	10,67%	17,93%
Tot RP/Tot	27,35%	45,40%	20,00%	9,53%	14,63%
RP Solved/Tot	2,23%	12,96%	8,32%	6,60%	7,30%

Tabella 13: tabella riassuntiva dell'analisi dei libri di testo nazionali e internazionale

Innanzitutto possiamo osservare che l'Italia in confronto con gli altri paesi ha un numero totale di problemi nettamente superiore. Nonostante ciò soltanto il 6,97% di essi è risolto. Inoltre confrontando gli RP risolti sul totale dei problemi possiamo notare che, anche in questo caso, l'Italia ha un valore percentuale molto basso rispetto agli altri paesi. Dunque nonostante i problemi totali siamo almeno il doppio rispetto a quello degli altri paesi, il numero dei problemi di RP, in Italia, è molto simile a quello delle altre nazioni.

Capitolo 3

R&P in un testo di scuola secondaria superiore

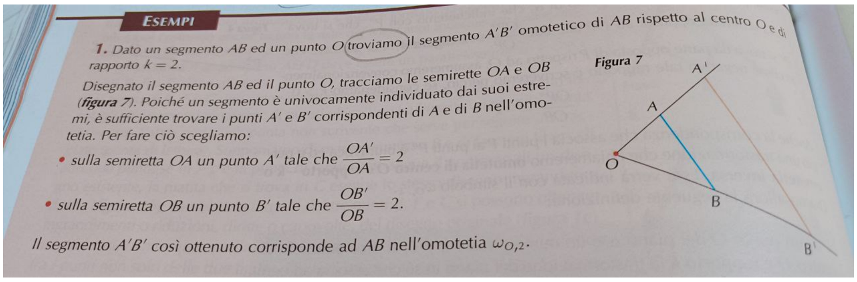
Dopo aver osservato l'indagine sperimentali della tesi di dottorato della Dott.essa Pompili, grazie ad un idagine internazionali e alla creazione di nuovi codici, si dispone di tutti gli strumenti per poter procedere con questa nuova sperimentazione in ambito geometrico.
Partendo dall'ipotesi che l'insegnante faccia di norma riferimento al libro di testo, si è scelto di lavorare su un manuale molto diffuso nelle scuole italiane e, dunque, largamente utilizzati sia dagli insegnanti che dagli studenti. Il libro di testo in cui abbiamo selezionato il materiale per l'analisi è il *Fraschini R., Grazzi G. Geometria. Bergamo: ATLAS. (Ristampa 2009).*
La nostra analisi si è limitata ai capitoli dedicati alle trasformazioni del piano: omotetia e similitudine (da pag. 420 a pag. 477).

3.1 Analisi di esempi R&P geometrici

Nella parte analizzata del libro di testo sono presenti 203 problemi di cui soltanto 13 sono svolti. Nello specifico, tra i 13 problemi svolti, ne sono stati individuati 8 classificabili come Reasoning and Proof, dunque soltanto il 3,9% dei problemi (svolti+non svolti) è R&P risolto. Gli altri non sono stati classificati come attività R&P, perché gli studenti devono solo applicare in matiera sistematica quello che si è appena spiegato o dimostrato, dunque le attività di ragionamento coinvolte sono ragionevolmente limitate.

Adesso si riportano le evidenze sperimentali legate ad problemi di R&P, valutandoli in accordo con i codici di MaTeK.

ESEMPI 1-2-3


ESEMPI

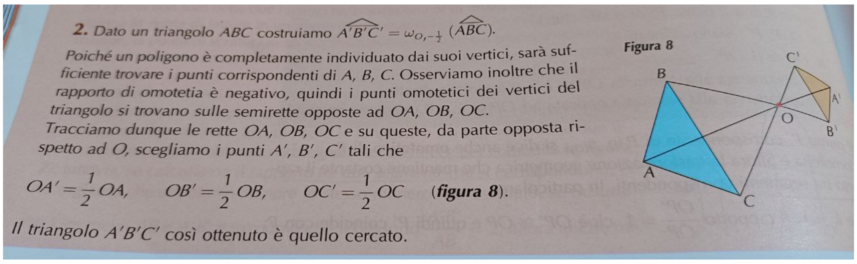
1. Dato un segmento AB ed un punto O troviamo il segmento $A'B'$ omotetico di AB rispetto al centro O e di rapporto $k = 2$.

Disegnato il segmento AB ed il punto O, tracciamo le semirette OA e OB (**figura 7**). Poiché un segmento è univocamente individuato dai suoi estremi, è sufficiente trovare i punti A' e B' corrispondenti di A e di B nell'omotetia. Per fare ciò scegliamo:

- sulla semiretta OA un punto A' tale che $\frac{OA'}{OA} = 2$
- sulla semiretta OB un punto B' tale che $\frac{OB'}{OB} = 2$.

Il segmento $A'B'$ così ottenuto corrisponde ad AB nell'omotetia $\omega_{O,2}$.

Figura 22: primo esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9

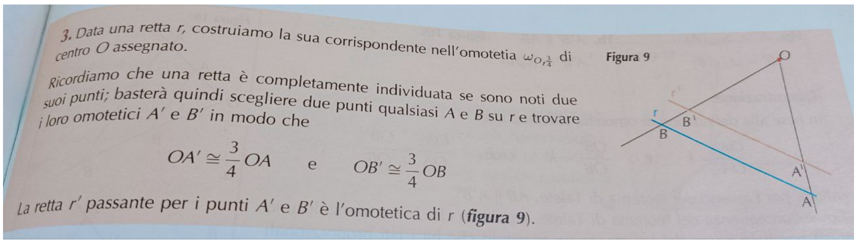

2. Dato un triangolo ABC costruiamo $\widehat{A'B'C'} = \omega_{O,-\frac{1}{2}}(\widehat{ABC})$.

Poiché un poligono è completamente individuato dai suoi vertici, sarà sufficiente trovare i punti corrispondenti di A, B, C. Osserviamo inoltre che il rapporto di omotetia è negativo, quindi i punti omotetici dei vertici del triangolo si trovano sulle semirette opposte ad OA, OB, OC.
Tracciamo dunque le rette OA, OB, OC e su queste, da parte opposta rispetto ad O, scegliamo i punti A', B', C' tali che

$$OA' = \frac{1}{2}OA, \quad OB' = \frac{1}{2}OB, \quad OC' = \frac{1}{2}OC \quad (\textbf{figura 8}).$$

Il triangolo $A'B'C'$ così ottenuto è quello cercato.

Figura 23: secondo esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9


3. Data una retta r, costruiamo la sua corrispondente nell'omotetia $\omega_{O,\frac{3}{4}}$ di centro O assegnato.

Ricordiamo che una retta è completamente individuata se sono noti due suoi punti; basterà quindi scegliere due punti qualsiasi A e B su r e trovare i loro omotetici A' e B' in modo che

$$OA' \cong \frac{3}{4}OA \quad \text{e} \quad OB' \cong \frac{3}{4}OB$$

La retta r' passante per i punti A' e B' è l'omotetica di r (**figura 9**).

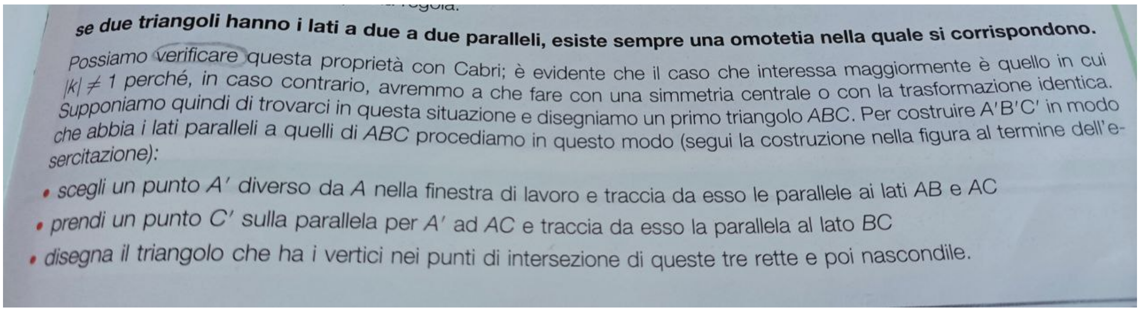
Figura 24: terzo esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9

Nelle immagini precedenti sono riportati i primi tre esercizi del capitolo sulle omotetie caratterizzati dal medesimo scopo, infatti, tutti e tre, servono ad introdurre rispettivamente i tre teoremi che si trovano alle pagine successive. Dunque li possiamo classificare come problemi introduttivi. Nonostante questi tre problemi non contengano le solite parole chiave che si possono trovare in un problema di R&P, spiegare provare, dimostrare ecc..., nella loro risoluzione hanno tutte le caratteristiche di un problema di questo tipo. Infatti contengono delle argomentazioni volte a giustificare il metodo di risolzione utilizzato. In accordo con quanto descritto nel capitolo precedente questi esempi potrebbero essere categorizzati attraverso i codici MaTeK come:

1. Appeal to authority;
2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, ...).

ESEMPIO 4

La seguente immagine riporta un problema svolto attraverso l'ausilio della tecnologia, nello specifico attraverso cabri.

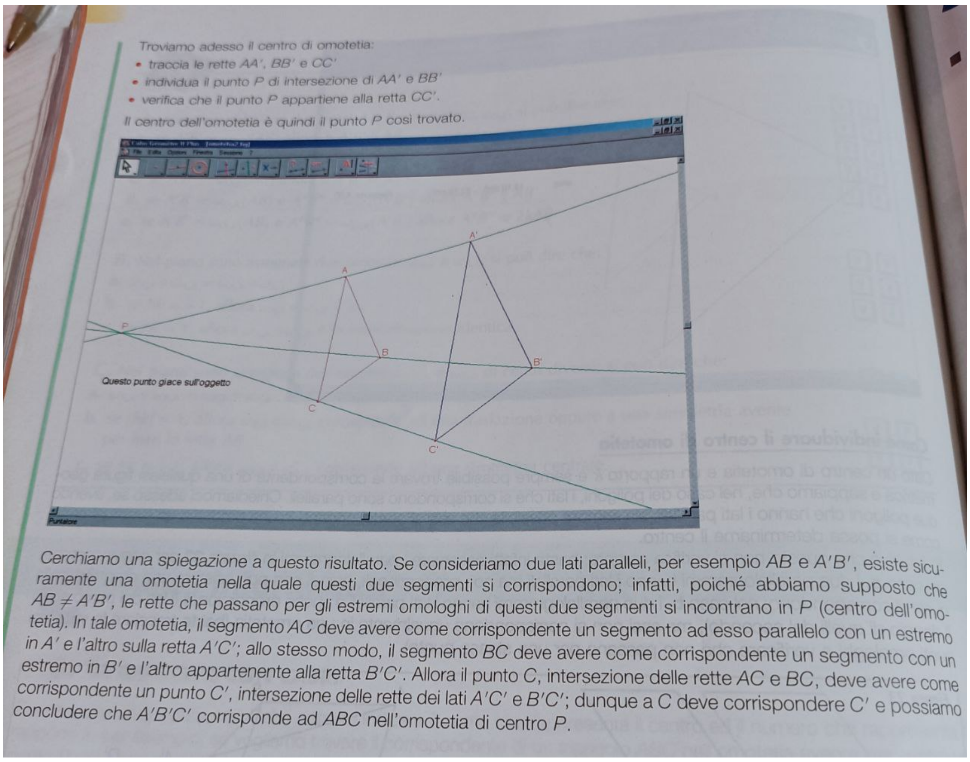


se due triangoli hanno i lati a due a due paralleli, esiste sempre una omotetia nella quale si corrispondono.

Possiamo verificare questa proprietà con Cabri; è evidente che il caso che interessa maggiormente è quello in cui $|k| \neq 1$ perché, in caso contrario, avremmo a che fare con una simmetria centrale o con la trasformazione identica. Supponiamo quindi di trovarci in questa situazione e disegniamo un primo triangolo ABC. Per costruire $A'B'C'$ in modo che abbia i lati paralleli a quelli di ABC procediamo in questo modo (segui la costruzione nella figura al termine dell'esercitazione):

- *scegli un punto A' diverso da A nella finestra di lavoro e traccia da esso le parallele ai lati AB e AC*
- *prendi un punto C' sulla parallela per A' ad AC e traccia da esso la parallela al lato BC*
- *disegna il triangolo che ha i vertici nei punti di intersezione di queste tre rette e poi nascondile.*

Figura 25: quarto esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9 (continua a pagina seguente)



Troviamo adesso il centro di omotetia:

- traccia le rette AA', BB' e CC'
- individua il punto P di intersezione di AA' e BB'
- verifica che il punto P appartiene alla retta CC'.

Il centro dell'omotetia è quindi il punto P così trovato.

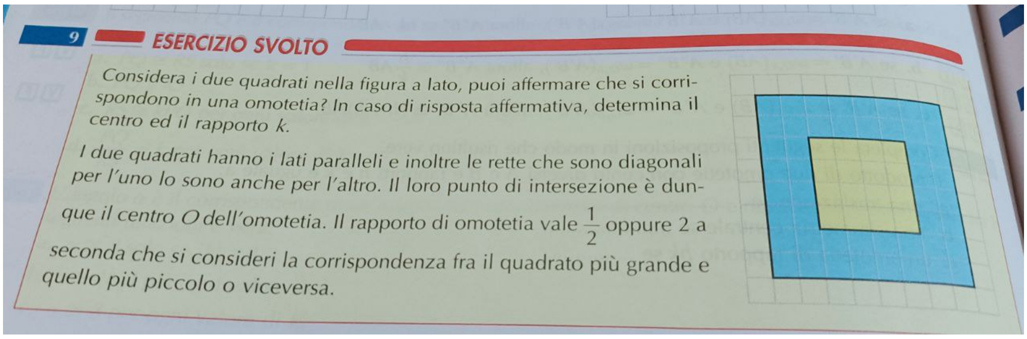
Cerchiamo una spiegazione a questo risultato. Se consideriamo due lati paralleli, per esempio AB e $A'B'$, esiste sicuramente una omotetia nella quale questi due segmenti si corrispondono; infatti, poiché abbiamo supposto che $AB \neq A'B'$, le rette che passano per gli estremi omologhi di questi due segmenti si incontrano in P (centro dell'omotetia). In tale omotetia, il segmento AC deve avere come corrispondente un segmento ad esso parallelo con un estremo in A' e l'altro sulla retta $A'C'$; allo stesso modo, il segmento BC deve avere come corrispondente un segmento con un estremo in B' e l'altro appartenente alla retta $B'C'$. Allora il punto C, intersezione delle rette AC e BC, deve avere come corrispondente un punto C', intersezione delle rette dei lati $A'C'$ e $B'C'$; dunque a C deve corrispondere C' e possiamo concludere che $A'B'C'$ corrisponde ad ABC nell'omotetia di centro P.

Figura 26: quarto esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9

La presenza della parola chiave "verifica" permette quasi immediatamente di classificarlo come un problema di R&P. Questo problema si può considerare di approfondimento e ha lo scopo di giustificare un enunciato.
In accordo con quanto descritto nel capitolo precedente questo esempio potrebbe essere categorizzato attraverso i codici MaTeK come:
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning;
T Using (digital) technology.

ESEMPIO 5

A differenza degli altri problemi che si trovavano all'interno di un contesto teorico, tra una spiegazione e un'altra, il seguente compito lo si ritrova all'interno della parte dedicata a tutti gli esercizi ed è seguito da esercizi non risolti.


9 ESERCIZIO SVOLTO

Considera i due quadrati nella figura a lato, puoi affermare che si corrispondono in una omotetia? In caso di risposta affermativa, determina il centro ed il rapporto k.

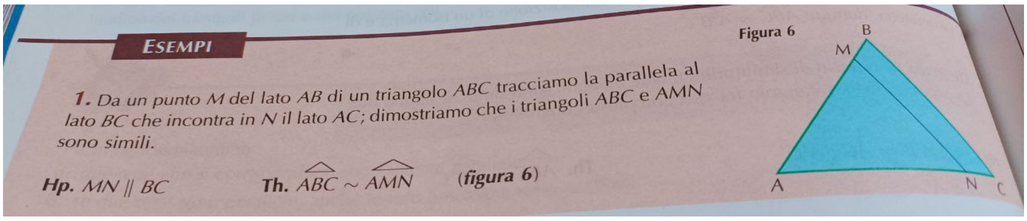
I due quadrati hanno i lati paralleli e inoltre le rette che sono diagonali per l'uno lo sono anche per l'altro. Il loro punto di intersezione è dunque il centro O dell'omotetia. Il rapporto di omotetia vale $\frac{1}{2}$ oppure 2 a seconda che si consideri la corrispondenza fra il quadrato più grande e quello più piccolo o viceversa.

Figura 27: quinto esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9

Lo si classifica come problema di R&P poichè implicitamente si chiede di verificare, attraverso l'osservazione della figura, che i due quadrati rappresentati si corrispondo in una omotetia. Dunque lo scopo è proprio quello di verificare se si tratti di un omotetia.
In accordo con quanto descritto nel capitolo precedente questo esempio potrebbe essere categorizzato attraverso i codici MaTeK come:
3. Mathematization (with explained steps);
R real-world situations.

ESEMPI 6-7

I seguenti esempi si ritrovano 2 esercizi della sezione sulla similitudite. Questi problemi sono caratterizzati entrambi dalla richiesta specifica di "dimostrare" un determinato enunciato.

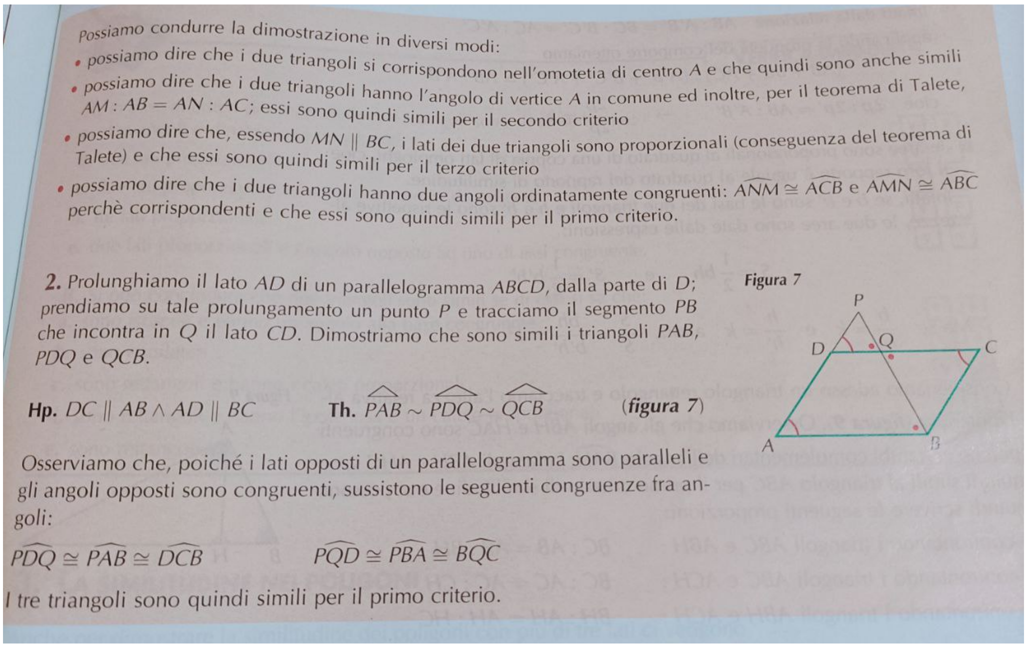


ESEMPI

1. *Da un punto M del lato AB di un triangolo ABC tracciamo la parallela al lato BC che incontra in N il lato AC; dimostriamo che i triangoli ABC e AMN sono simili.*

Hp. $MN \parallel BC$ **Th.** $\widehat{ABC} \sim \widehat{AMN}$ (**figura 6**)

Figura 28: sesto esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9



Possiamo condurre la dimostrazione in diversi modi:

- possiamo dire che i due triangoli si corrispondono nell'omotetia di centro A e che quindi sono anche simili
- possiamo dire che i due triangoli hanno l'angolo di vertice A in comune ed inoltre, per il teorema di Talete, $AM : AB = AN : AC$; essi sono quindi simili per il secondo criterio
- possiamo dire che, essendo $MN \parallel BC$, i lati dei due triangoli sono proporzionali (conseguenza del teorema di Talete) e che essi sono quindi simili per il terzo criterio
- possiamo dire che i due triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti: $\widehat{ANM} \cong \widehat{ACB}$ e $\widehat{AMN} \cong \widehat{ABC}$ perchè corrispondenti e che essi sono quindi simili per il primo criterio.

2. Prolunghiamo il lato AD di un parallelogramma $ABCD$, dalla parte di D; prendiamo su tale prolungamento un punto P e tracciamo il segmento PB che incontra in Q il lato CD. Dimostriamo che sono simili i triangoli PAB, PDQ e QCB.

Hp. $DC \parallel AB \wedge AD \parallel BC$ **Th.** $\widehat{PAB} \sim \widehat{PDQ} \sim \widehat{QCB}$ (**figura 7**)

Osserviamo che, poiché i lati opposti di un parallelogramma sono paralleli e gli angoli opposti sono congruenti, sussistono le seguenti congruenze fra angoli:

$\widehat{PDQ} \cong \widehat{PAB} \cong \widehat{DCB}$ $\widehat{PQD} \cong \widehat{PBA} \cong \widehat{BQC}$

I tre triangoli sono quindi simili per il primo criterio.

Figura 29: continuazione del sesto esempio e settimo esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9

Il primo problema viene risolto in 4 diversi modi. Se 2 di questi modi di ragionare sono simili ad altri già esaminati, gli altri 2 sono caratterizzati dal far riferimento al teorema di Talete, dunque vi è un "appello all'autorità".

In accordo con quanto descritto nel capitolo precedente questi esempi potrebbero essere categorizzato attraverso i codici MaTeK come:

6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning (il primo problema nella prima e quarta risoluzione & il secondo problema);

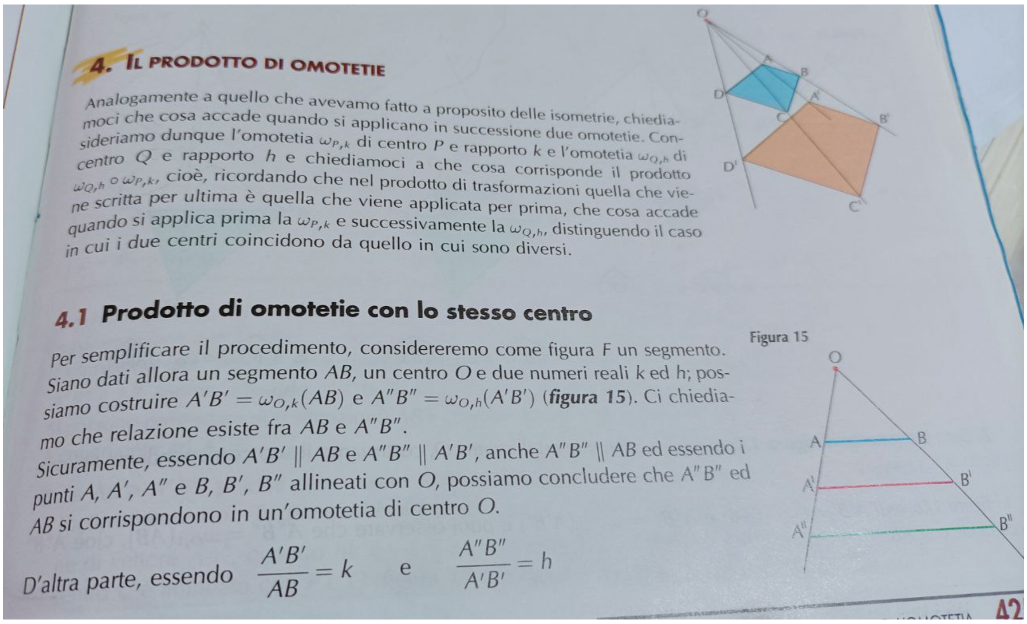
1. Appeal to authority;

2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, . . .)

(Il primo problema nelle altre due risoluzioni).

ESEMPIO 8

Un ultimo esempio è riportato nelle seguenti immagini.



4. Il prodotto di omotetie

Analogamente a quello che avevamo fatto a proposito delle isometrie, chiediamoci che cosa accade quando si applicano in successione due omotetie. Consideriamo dunque l'omotetia $\omega_{P,k}$ di centro P e rapporto k e l'omotetia $\omega_{Q,h}$ di centro Q e rapporto h e chiediamoci a che cosa corrisponde il prodotto $\omega_{Q,h} \circ \omega_{P,k}$, cioè, ricordando che nel prodotto di trasformazioni quella che viene scritta per ultima è quella che viene applicata per prima, che cosa accade quando si applica prima la $\omega_{P,k}$ e successivamente la $\omega_{Q,h}$, distinguendo il caso in cui i due centri coincidono da quello in cui sono diversi.

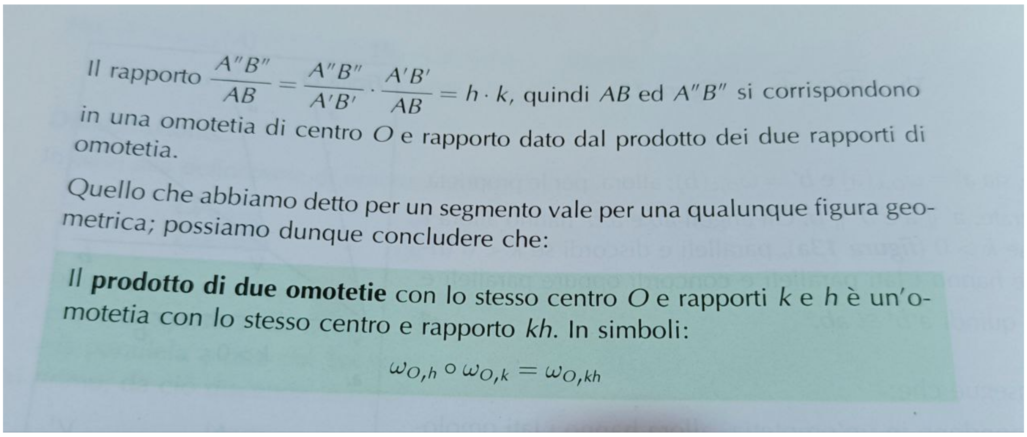
4.1 Prodotto di omotetie con lo stesso centro

Per semplificare il procedimento, considereremo come figura F un segmento. Siano dati allora un segmento AB, un centro O e due numeri reali k ed h; possiamo costruire $A'B' = \omega_{O,k}(AB)$ e $A''B'' = \omega_{O,h}(A'B')$ (**figura 15**). Ci chiediamo che relazione esiste fra AB e $A''B''$.

Sicuramente, essendo $A'B' \parallel AB$ e $A''B'' \parallel A'B'$, anche $A''B'' \parallel AB$ ed essendo i punti A, A', A'' e B, B', B'' allineati con O, possiamo concludere che $A''B''$ ed AB si corrispondono in un'omotetia di centro O.

D'altra parte, essendo $\dfrac{A'B'}{AB} = k$ e $\dfrac{A''B''}{A'B'} = h$

Figura 30: esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9



Il rapporto $\dfrac{A''B''}{AB} = \dfrac{A''B''}{A'B'} \cdot \dfrac{A'B'}{AB} = h \cdot k$, quindi AB ed $A''B''$ si corrispondono in una omotetia di centro O e rapporto dato dal prodotto dei due rapporti di omotetia.

Quello che abbiamo detto per un segmento vale per una qualunque figura geometrica; possiamo dunque concludere che:

Il **prodotto di due omotetie** con lo stesso centro O e rapporti k e h è un'omotetia con lo stesso centro e rapporto kh. In simboli:

$$\omega_{O,h} \circ \omega_{O,k} = \omega_{O,kh}$$

Figura 31: esempio R&P tratto dal libro di testo italiano di grado 9

Questo problema si trova all'interno di una spiegazione introduttiva e anticipa un enunciato. Il registro linguistico si trasforma diventando sempre più formale, e anche da un punto di vista tipografico, la posizione delll'enunciato alla fine del problema di R&P che lo giustifica, procura l'immediato effetto visivo di percepire la spiegazione dimostrativa come la normale prosecuzione della spiegazione prologo che la precede, e anzi sembra indurre a pensare che le due costituiscano una trattazione unitaria che termina con l'enunciato. Il fatto di lasciare implicita la natura del testo, ed anzi

in qualche senso attribuirgli uno status diverso, insieme al fatto di innestarlo all'interno di un complesso di spiegazioni di un altro tipo, può portare il lettore inesperto a non classificare correttamente il discorso che ha di fronte. Dunque questo tipo di spiegazione può sicuramente generare confusione e di conseguenza scivolamento di senso tra spiegazione e dimostrazione.
In accordo con quanto descritto nel capitolo precedente questo esempio potrebbe essere categorizzato attraverso i codici MaTeK come:
6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning.

Dall'analisi fatta si evince come il quadro teorico relativo ad argomentazione, spiegazione e dimostrazione, descritto tra gli altri anche dalla Pompili e dalla Mariotti, e il quadro teorico di Matek, descritto nel secondo capitolo, possano essere utilizzati anche in contesti geometrici come fatto in questo lavoro.
A seguito di questa indagine, si cercherà di ampliare la numerosità degli item da considerare, cercando di valutare l'intero libro di geometria, andando sempre ad osservare soltanto i problemi di R&P risolti.

Conclusione

La tesi di laurea qui discussa, affronta la problematica legata a ragionamento e dimostrazione (R&P), guardando ad un contesto nazionale e internazionale.
In letteratura questo subject è stato ampliamente discusso, partendo per esempio da Toulmin che propose uno schema metodologico per definire la struttura di una argomentazione, passando per Duval che analizzò lo stato teorico e operativo di una dimostrazione, fino ad arrivare a trattazioni più recenti come quella di Pompili (2015) in cui si delineano i tratti caratterizzanti di una spiegazione.
La Dott.essa Pompili nel suo lavoro di tesi si è chiesta se la mancanta attenzione sulle distinzioni tra tutte le produzioni discorsive orientate a giustificare la verità, potesse portare a delle situazioni di ambiguità che ostacolassero lo studente rispetto alla comprensione dell'idea di dimostrazione, portando così ad uno scivolamento di senso. Nella sua tesi ha analizzato libri di testo in ambito algebrico, supponendo l'ipotesi, poi confermata attraverso delle interviste, del condizionamento degli insegnanti da esso. Questa ricerca ha mostrato come nei libri italiani spesso non vengano spiegati i tratti fondamentali di una dimostrazione.
Nonostante le svariate trattazioni che si possono ritrovare in letteratura a riguardo, la prima ricerca che ha portato alla creazione di codici utili a categorizzare tutti i problemi di Reasoning e Proof è nata soltanto tra il 2019 e il 2020 con il progetto internazionale MaTeK, progetto volto al miglioramento della pratica scolastica attraverso lo studio cooperativo di cinque equipe di nazioni diverse. Ogni equipe ha analizzato il libro di testo nazionale più diffuso nel proprio paese e categorizzato ogni problema di R&P risolto con questi esiti.

	ITALIA	TURCHIA	NORVEGIA	SLOVACCHIA	REP. CECA
TOTAL (solved + unsolved)	5685	903	1190	2456	697
Solved %	6,97%	22,59%	10,92%	10,67%	17,93%
Tot RP/Tot	27,35%	45,40%	20,00%	9,53%	14,63%
RP Solved/Tot	2,23%	12,96%	8,32%	6,60%	7,30%

Tabella 13: tabella riassuntiva dell'analisi dei libri di testo nazionali e internazionale

Innanzitutto possiamo osservare che l'Italia in confronto con gli altri paesi ha un numero totale di problemi nettamente superiore. Nonostante ciò soltanto il 6,97% di essi è risolto e addirittura soltanto il 2,23% è R&P risolto.

Questo indica, purtroppo, che gli alunni non vengono guidati ad un ragionamento matematico, piuttosto si abituano a lavorare per algoritmi.

Gli altri testi dei contesti internazionali hanno una filosofia molto diversa, infatti nella totalità dei problemi, percentuali significative sono collegate al R&P, dunque guidano lo studente al ragionamento della dimostrazione. Questo dimostra la grande attenzione che hanno riguardo questa tematica.

Il lavoro sperimentale discusso in questa tesi, a differenza della Pompili, si è sviluppato nall'ambito geometrico nello specifico, sul contesto delle trasformazione geometriche quali omotetie e similitudini.

Sono stati estratti, tra i 203 problemi, soltanto 8 esempi di R&P risolti, che sono stati categorizzati secondo i codici MaTeK. Gli 8 item sono legati soprattutto all'ambito deduttivo o ragionamento a priori, nello specifico sono stati riscontrati i seguenti codici:

1. Appeal to authority

2. A-priori reasoning (using definition, notation, application of formulas, data from a graph, . . .)

3. Mathematization (with explained steps)

R real-world situations

6. Developing conclusions/ justifying/ refuting through deductive reasoning

T Using (digital) technology

L'evidenza sperimentale attesta che i libri di testo italiani sono colmi di esercizi non risolti che addestrano lo studente in modo meccanico, con un numero residuo di esempi che lo guidino nel modo di ragionare.

Inotre anche da questa limitata analisi, come in quella svolta dall'equipe italiano di

MaTeK, si può notare uno scarso bilanciamento dei modi di ragionare proposti negli esempi, preferendo troppo spesso l'uso di una dimostrazione, one step, a priori.
Dato il ruolo centrale del libro di testo nella pratica scolastica, si ritiene che uno dei modi più promettenti per sostenere gli sforzi degli insegnanti in questo ambito sia quello di dotarli di un manuale che tenga conto della ricerca internazionale attuale.
L'inclusione di più modalità di ragionamento nei libri di testo potrebbe indicare un'attenzione da parte degli autori dei libri alla complessità dello sviluppo della comprensione matematica, in quanto la ricchezza e la diversità delle giustificazioni dei libri di testo potrebbero fornire opportunità di apprendimento e comprensione della matematica a studenti con abilità, punti di forza e background diversi.

Bibliografia

[1] Anscombre J. C., Ducrot O., *L'argumentation dans la langue*, Bruxelles: Mardaga, 1983.

[2] Di Martino, P., Baccaglini-Frank, A., *La didattica della matematica e l'interpretazione dei fenomeni di classe: i problemi contestualizzati. La didattica della matematica e l'interpretazione dei fenomeni di classe: i problemi contestualizzati*, 151-154, 2018.

[3] Doris Jeannotte Carolyn Kieran, *A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics*, Springer Science Business Media Dordrecht, 2017 .

[4] Duval, R., *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de l'Ecole d'été,* 1995.

[5] Jansen, H., *Densità Informativa.* Museum Tusculanum Press, 2003.

[6] Laborde, C., *Language and Mathematics.* In P. Nesher, J. Kilpatrick (A cura di), Cognition and Mathematics. Cambridge Univrsity Press, 1990.

[7] Palmiero, C., *Computer e apprendimenti: una questione aperta. Computer e apprendimenti: una questione aperta*, 9-18, 2015.

[8] Pedemonte, B., *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques Didactical and cognitive study of argumentation and proof in the learning of mathematics* , (Unpublished doctoral dissertation). Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2002.

[9] Perelman C., Olbrechts-Tyteca L., *Traité de l'argumentation*, 1988;La nouvelle rhétorique Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles 1992 .

[10] Piseri, M., *Le competenze degli studenti e della popolazione italiana nelle inchieste internazionali: il punto di vista di uno storico dell'alfabetismo. Le competenze degli studenti e della popolazione italiana nelle inchieste internazionali: il punto di vista di uno storico dell'alfabetismo*, 75-91, 2020.

[11] Plantin C., *Essais sur l'argumentation*, Kimé (ed.), Paris, 1990

[12] Pompili R., *Spiegazione e dimostrazione nella pratica scolastica*, Tesi Dottorato di Ricerca, Palermo, 2015.

[13] Toulmin S. E., *The use of arguments.* Cambridge: University Press, 1958; Traduction française par De Brabanter P. Les usages de l'argumentation, Presse Universitaire de France, 1993.

[14] Yackel E, *Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms*, Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25, Van den Heuvel-Panhuizen M. (ed.), vol. 4, 33-40, Utrecht, Olanda, 2001.

[15] Yackel, E., Hanna, G., *Reasoning and proof.* In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), A research companion to NCTM's Principles and Standards (pp. 22-44). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.