Teoretická fyzika pre učiteľstvo fyziky

Samuel Kováčik

2024

Elektronický učebný materiál

FAKULTA MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
Univerzita Komenského
v Bratislave

Katedra teoretickej fyziky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Autor: Samuel Kováčik
Grafická úprava: LaTeX, Samuel Kováčik
Názov: Teoretická fyzika pre učiteľstvo fyziky
Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK
Rok vydania: 2024
Miesto vydania: Bratislava
Vydanie: prvé
Počet strán: 134
Dostupné na: `http://davinci.fmph.uniba.sk/~kovacik31/`
ISBN: 978-80-8147-144-5

Obsah

Pár slov na úvod

Existujú tri rôzne veci, ktoré si ľudia často zamieňajú: prírodu, fyziku a matematiku. Úzko spolu súvisia, sú však odlišné. V školách sa často učí matematika, potom sa pridá fyzika a príroda zostáva vonku za oknami. Vo výsledku to môže dopadnúť tak, že žiaci a študenti nemajú radi fyziku, nechápu na čom im je matematika a nerozumejú mnohým prírodným javom.

Je to škoda, fyzika a matematika tvoria základ našej snahy porozumieť svetu okolo nás. Odrazovým mostíkom je pozorovanie prírody, ktorým to nanešťastie pre mnohých aj skončí, pokochajú a sú spokojní: „Jééj, aká pekná dúha!" a hotovo. Niektorí si však kladú otázku: „Prečo?" Prečo vzniká dúha? Prečo len keď prší? A prečo sa nachádza práve tam? Prečo nie je väčšia či menšia? Formovať a overovať modely a hypotézy o tom, ako niečo funguje v prírode, to je úlohou fyziky. Ľudia za túto činnosť platení sa volajú fyzici. Alebo chemičky či biologičky alebo geografovia. Príroda má mnohé špecifické zákutia, na ktoré sa sústredí špecifická časť výskumníkov a tak dostali špeciálnu meno. Spoločne ale skúmame prírodu, premýšľame, ako funguje.

Problém s vymýšľaním teórií ako niečo funguje je taký, že človek si ľahko – a dokonca úplne neúmyselne – môže vymyslieť nezmysel. Môže si vymyslieť teóriu, ktorá znie pekne, ale nesprávne opisuje prírodný jav. A tu vstupuje do hry matematika. Pomocou matematiky vieme formulovať a spočítať, teda vyčísliť, dôsledky fyzikálnych teórií a výsledok môžeme viac či menej presne porovnať s pozorovaniami. Ak predpoveď nesedí s výsledkom pozorovaní, musíme teóriu opraviť. Ak sa opraviť nedá, treba ju zahodiť.

Ak dáva teória predpovede, ktoré sú v zhode s experimentom, môžeme spokojne prehlásiť, že je správna? Nie, nemôžeme. Vo vede dokážeme len vylúčiť nesprávne predpovede, nevieme potvrdiť tie správne. Ak sa však dosť dlho nepodarí vyvrátiť nejakú teóriu, opatrne ju prehlásime za (dočasne) najlepší známy opis prírody. Zoberme si ako príklad Newtonovu teóriu gravitácie. Presne opisovala javy na Zemi aj na oblohe a úspešne odolávala snahám o jej vyvrátenie a tak bola dlho považované za najlepší vtedy dostupný opis gravitácie. Postupne sa odhalili nepresnosti, ktoré úspešne objasnila Einsteinova všeobecná teória relativity. O žiadnej aktuálnej teórii si netrúfame povedať, že je definitívna; určite nie čo sa týka fundamentálnych fyzikálnych teórií. Sú to naše aktuálne najpresnejšie matematické modely prírodných javov, ktoré máme.

Teoretická fyzika operuje v trojuholníku príroda-fyzika-matematika na spojnici medzi fyzikou a matematikou. Teoretici a teoretičky skúmajú, aká matematika je schopná opisovať viac či menej rozumnú fyziku a ako z fyzikálnych teórií získať overiteľné odpovede. Našou úlohou v tomto kurze bude pochopiť práve tieto aspekty, teda ako rovnice opisujú prírodu. Alebo ešte presnejšie, ako sa príroda v rovniciach zrkadlí. Bude našou snahou to robiť pomocou čo najjednoduchšej matematiky, lebo pri zložitých výpočtoch platí, že pre stromy bežne nie je vidieť les. Dôležitejšie, ako vedieť rovnice riešiť – to sa predsa učí na matematike – bude ako rovniciam rozumieť.

Existuje známa, viac-menej filozofická, otázka, či matematiku objavujeme alebo vynachádzame. Znie zvláštne, vychádza z pocitu prekvapenia, že pomocou fyziky a matematiky vieme vesmír opísať neuveriteľne presne, bežne na mnoho desatinných miest. Pozrime sa napríklad na čísla. Niektorí tvrdia, že príroda pozná len prirodzené čísla. Ich názov tomu nasvedčuje. Existuje vo vesmíre niečo, čoho je -2, $\frac{4}{5}$ alebo π? Alebo sú to naše užitočné koncepty pre prácu s dlhmi, delením či uhlami? Že otázka pôvodu matematiky nemá jasnú odpoveď znamená, že matematika celkom presvedčivo vzbudzuje dojem – či už skutočný, alebo nie – že ju vytvárame. Prečo ju robíme? Aby odzrkadľovala prírodu. Aj tento súvis sa budeme snažiť vyhľadať a pochopiť.

Je zaujímavé, že matematika vôbec existuje a že je taká efektívna na opis prírody. Eugene Wigner napísal v roku 1960 článok The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, stojí za prečítanie. V nasledujúcom texte využijeme tento úzky vzťah v opačnom garde – použijeme prírodu, opísanú z pohľadu fyziky, aby sme si vybudovali intuíciu o matematike, ktorá patrí do základných nástrojov fyzikálneho kurikula.

Malá technická poznámka: v texte sú vyznačené

- takýmto spôsobom,

otázky na premyslenie či prediskutovanie. Ak si tento text čítate, môžete sa nad nimi zamyslieť. Ak tento text sledujete počas prednášok, venujeme im pár minút. Tento text nemá fungovať tak, že si ho človek prečíta, zapamätá a zrazu bude učivo ovládať. Z veľkej časti je to objavovaní, či už samostatnom alebo kolektívnom vo forme diskusie. Tieto poznámky sú napísané pre kurz, ktorý trvá dva semestre a má rôzne časové dotácie. Kým v základných témach sa snažíme ísť do hĺbky, pri zložitejších témach sa uspokojíme s prediskutovaním základných bodov. V texte často predpokladám, že sa s mnohými pojmami študenti už stretli, preto sa namiesto definícií sústredím hlavne na ich intuitívne priblíženie. Na konci každej kapitoly je pár tipov na projekty, ktoré sa vypracovávajú v rámci záverečného hodnotenia, sú inšpiráciou na ďalšiu prácu nad rámec bežnej výučby.

Témy tohto textu jednoznačne prevyšujú obsah základoškolskej a stredoškolskej fyziky, aký je teda význam tohto kurzu pre budúcich pedagógov? Dvojaký. Po prvé, je dobré byť pred žiakmi o krok napred a vidieť za oponu. Odpovede na ťažké otázky o učive sú často ukryté o úroveň vyššie, než boli položené. Po druhé, významným cieľom tohto textu je intuitívne priblížiť matematiku a niektoré diskutované oblasti fyziky možno pôsobia okrajovo, no dobre demonštrujú aspekty geometrie, algebry či diferenciálnych počtov.

Takže, poďme na to!

1 Pohyb hmotného bodu

1.1 Poloha a čas

Pohyb je zmena polohy voči času. Ak toto tvrdenie považujete za bezproblémové, tak ste zvyknutí rozmýšľať vo fyzike pred 20. storočím. Revolúcia kvantovej mechaniky a teórie relativity spochybnila takmer všetky podstatné mená v prvej vete. Pohyb, poloha či čas môžu byť komplikované pojmy. Doprajme si však trochu Newtonovského romantizmu a poďme preskúmať najjednoduchší – a tým pádom aj najnudnejší – problém vo fyzike: pohyb jedného hmotného bodu.

Pohyb hmotného bodu v priestore opisujeme pomocou troch funkcií

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \ . \tag{1}$$

- Záleží na ich poradí? Je jednoznačné?
- Čo je to vlastne funkcia?

Interpretácia tejto rovnice je priamočiara. Každému časovému okamžiku vieme priradiť tri čísla a tieto čísla vieme interpretovať ako súradnice, ktoré opisujú polohu telesa. Pre jednoduchosť budeme chvíľu premýšľať len o jednorozmernom prípade, teda poloha bodu je plne zadaná jednou funkciou $x(t)$ — dá sa pod tým predstaviť pohyb po čiare. Vo fyzike sa často stretneme s príkladom telesa, ktoré existuje v troch rozmeroch, ale jeho pohyb je viazaný len na čiaru.

- Viete vymyslieť taký príklad?
- V matematike majú funkcie rôzne vlastnosti, napríklad jednoznačnosť, spojitosť či hladkosť. Ako by sa dala spojitosť funkcie interpretovať v kontexte predošlého vzťahu? Musí byť poloha častice spojitá funkcia času?

Matematická funkcia je predpis, ktorý číslam priradzuje čísla [1]. Vo fyzike sme však zvyknutí na rozmerné veličiny, teda niečo, čo má hodnotu vyjadrenú v jednotkách – teda vzhľadom na nejakú referenčnú hodnotu. Typické jednotky pre meranie priestoru a času sú metre a sekundy. Rozmýšľali ste niekedy, či niekto roztiahol ruky a povedal: „Hľa, toto je jeden meter?“

[1]Existujú zobrazenia aj zložitejších objektov, to teraz môžeme ignorovať, aj keď neskôr narazíme na viacero príkladov

So sekundou je to jednoduché, je to približne $\frac{1}{24\times60\times60}$ dňa. Prečo je hodín 24 a nie 2×10, ale dlhších? Skúšalo sa – napríklad vo Francúzsku – len sa to nechytilo. Číslo 12 má veľkú výhodu, dá sa celočíselne deliť viacerými spôsobmi – na polovice, tretiny, štvrtiny, šestiny, dvanástiny. Keď už máme 12 hodín na ciferníku, je najjednoduchšie spraviť jemnejšie delenie, ktoré je násobkom 12, napríklad na 5×12 minút a sekúnd.

- S počtom dní v mesiaci či v roku je to už zložitejšie a premenlivejšie. Prečo?

Ako súvisí sekunda s metrom? Aktuálna definícia je iná, historicky sa však používali mechanické objekty. Jeden meter bol kedysi definovaný napríklad ako dĺžka kyvadla, ktoré kmitá s periódou 2 sekúnd.

V tomto výpočte vystupuje aj gravitačná konštanta g. Aká je jej hodnota? To závisí od toho, ako zadefinujete m a s, teda metre a sekundy. Vzorec pre kyvadlo sa nám objaví neskôr, prezradím však, že pri aktuálnej definícii platí $g = \pi^2\ m\ s^{-2}$! Inými slovami, meter bol zadefinovaný tak, aby vychádzalo gravitačné zrýchlenie, merané v metroch a sekundách, rovné π^2. Vtedajší meter bol trochu kratší. Táto definícia je trochu problematická – gravitačné zrýchlenie totiž nie je všade na Zemi rovnaké.

- Prečo nie je gravitačné zrýchlenie všade na povrchu Zeme rovnaké? Dôvodov je viac, skúste nájsť aspoň tri.

Jedna z prvých definícií metra bola pomerne nepraktická: šlo o desaťmilióntinu vzdialenosti od pólu k rovníku (cez Paríž). No a keď už bol jasný meter, tak pomocou hustoty vody bol definovaný kilogram.

- Ako?

- Dnes sa už ani jedna z týchto definícii nepoužíva, nahradila ich definícia cez fyzikálne konštanty. Aká? A aká je jej výhoda?

Rýchlosť

Antická filozofia vyprodukovala zaujímavý paradox, Zénón prišiel pred približne 2500 rokmi s úvahou o nedobehnuteľnosti korytnačky. Rýchly bežec, Achilles, je 10 metrov od korytnačky a rozbehne sa k nej. Kým k nej dobehne, korytnačka sa o kúsok vzdiali, dajme tomu o 10 centimetrov. Kým Achilles prebehne týchto 10 centimetrov, korytnačka bude znovu o kúsok ďalej. A takto, až do nekonečna, bude korytnačka Achillovi unikať – vždy, keď dobehne tam, kde bola, je ona už o kúsok inde. Asi každému je však jasné (komu nie, môže spraviť pokus), že toto nie je správny záver a aj pomalší bežec dokáže korytnačku dobehnúť.

- Kde je teda v jeho opise chyba?

Vtip spočíta v tom, že opísané udalosti (Achilles prebehne prvých 10 metrov, Achilles prebehne 10 centimetrov, Achilles ...) netrvajú rovnako dlho. A síce Zénónov postup opisuje nekonečný počet krokov, trvajú len konečne dlho.

- Viete vymyslieť príklad, kde spočítate nekonečne veľa čísiel a dostanete konečný výsledok?

Záver je taký, že s opisom pohybu a rýchlosti musíme byť opatrnejší. Predstavme si modelovú situáciu – ideme autom medzi dvomi mestami vzdialenými 200 kilometrov. Cestu sme prešli za dve hodiny. Priemerná rýchlosť je teda 100 kilometrov za hodinu, pekne v rámci právnych predpisov. Fyzikálne by sme to zapísali ako

$$\begin{aligned} x(0\ \mathrm{h}) &= 0\ \mathrm{km}, \\ x(2\ \mathrm{h}) &= 200\ \mathrm{km}. \end{aligned} \tag{2}$$

Informáciu o priemernej rýchlosti by sme – trochu zbytočne zložito – vyjadrili ako

$$v_p = \frac{x(2\ \mathrm{h}) - x(0\ \mathrm{h})}{2\ \mathrm{h} - 0\ \mathrm{h}} = 100\ \mathrm{km\ h^{-1}}. \tag{3}$$

Mohli by sme týmto výsledkom argumentovať, ak by nás zastavil policajt s tým, že sme prekročili maximálnu povolenú rýchlosť 130 kilometrov za hodinu? Čo ak sme prvú hodinu išli veľmi pomaly a druhú veľmi rýchlo? To, čo meria policajt, je okamžitá rýchlosť. Ako by sme zadefinovali okamžitú rýchlosť v čase t? Čo tak

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \tag{4}$$

Čiže zoberiem polohu v čase $t + h$ a odčítam polohu o chvíľu skôr. Je táto definícia dobrá? To záleží od veľkosti h. Aká je adekvátna? Ideálne taká, aby sa počas tohto intervalu rýchlosť takmer nemenila, bola konštantná. Ak napríklad zoberieme $h = 1\ s$, tak dostaneme priemernú rýchlosť v danej sekunde. Stačí to? Pre auto na diaľnici áno, pre elektrón v silnom elektrickom poli asi nie. Preto si to poistíme limitou

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \tag{5}$$

Pripomína vám tento vzorec niečo? To je definícia derivácie!

$$v = \frac{d\, x(t)}{d\, t} = \dot{x}(t). \tag{6}$$

Derivácia nám hovorí, ako sa nejaká veličina plynulo mení v závislosti od niečoho iného. V tomto prípade je to zmena polohy voči času.

- Skúste vymyslieť aspoň tri ďalšie príklady, v ktorých nám derivácia opisuje zmenu niečoho.

- Derivácia spĺňa niekoľko pravidiel, napríklad $(uv)' = u'v + uv'$ alebo $(t^a)' = a\ t^{a-1}$. Vieme ich vysvetliť na základe tohto princípu sledovania malých prírastkov?

Dráha

Ak vám niekto povie, že hodinu išiel priemernou rýchlosťou 10 kilometrov za hodinu, nie je ťažké zistiť, ako ďaleko zašiel. Čo však ak vám nepovie priemernú rýchlosť, ale povie vám, ako rýchlo sa pohyboval každú sekundu. Vedeli by ste zistiť, kam za hodinu prešiel? Každú sekundu prejde dráhu $\Delta s_i = v(t_i)\Delta t$, kde Δt je v tomto prípade 1 sekunda a $v(t_i)$ je priemerná rýchlosť v danú sekundu. Ako zistiť celkovú dráhu? Stačí spočítať prejdený úsek za každú zo sekúnd. Vyjadrené pre časové úseky dĺžky Δt máme

$$s = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\Delta t, \tag{7}$$

kde pohyb trvá dokopy čas $N \times \Delta t$.

- Ako modifikovať vzťah pre nerovnaké intervaly Δt?

Znovu však máme rovnaký problém. Aké Δt je dosť malé na to, aby sme počas neho mohli rýchlosť považovať za viac-menej konštantnú? Jednoduchá poistka, spravíme limitu

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} v(t_i) \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt, \tag{8}$$

kde t_1 a t_2 označujú začiatok a koniec pohybu. Správne ste spoznali vzorec pre výpočet určitého integrálu.

- Ako to súvisí s neurčitým integrálom?
- Určitý integrál sa ľudovo interpretuje ako plocha pod krivkou. Ako to súvisí s týmto vzorcom?
- Aký je súvis medzi integrálom a deriváciou?
- Prediskutujte, ako by mal vyzerať vzorec na meranie dĺžok kriviek a plochy plôch.

Rozvoj

Auto stojí na začiatku, v čase $t_0 = 0\ s$ v bode $x = 0\ m$. Kde sa bude nachádzať o chvíľu, v čase t? Ak je zaparkované, tak je to jednoduché

$$x(t) = x(0). \tag{9}$$

No dobre, čo tak trochu ťažšie. Čo ak sa pohybuje fixnou rýchlosťou v?

$$x(t) = x(0) + v\ t. \tag{10}$$

Čo ak sa aj rozbieha, teda ak sa mení nielen jeho poloha, ale aj rýchlosť? Teda ak má aj konštantné zrýchlenie $a(t)$, tak

$$x(t) = x(0) + v\ t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{11}$$

Niečo sa tu začína črtať. Už vieme, že rýchlosť je derivácia polohy podľa času $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$. Zrýchlenie je zmena rýchlosti, teda $a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$. Vzorec teda vyzerá takto

$$x(t) = x(0) + \frac{dx}{dt}(0)t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(0)t^2. \tag{12}$$

Čo ak sa mení aj zrýchlenie auta? Rozumný nápad na vzorec vyzerá takto:

$$x(t) = x(0) + \frac{dx}{dt}(0)t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{?}\frac{d^3x}{dt^3}(0)t^3. \tag{13}$$

Človek by naivne očakával, že za ? má byť 3. Správne tam však má byť $3! = 3 \times 2 \times 1$.

- Prečo?

Je jasné, že by sa takto dalo pokračovať:

$$x(t) = x(0) + \frac{dx}{dt}(0)t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}(0)t^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^nx}{dt^n}(0)t^n. \tag{14}$$

Tomuto sa hovorí Taylorov rozvoj funkcie. Peknú funkciu vieme – aspoň v blízkom okolí, teda pre malé t – nahradiť polynómom; bežne veľmi krátkym, prvé dva-tri členy. Čím viac členov zoberieme, tým je presnejší – na dokonale presný opis potrebujeme zobrať všetky členy, čiže nekonečne veľa.

- Aké funkcie považujeme za pekné? V matematike sa objavujú najrôznorodejšie funkcie, vo fyzike mávame isté zjednodušujúce predpoklady, aké?
- Nie je zvláštne, že v jednom bode poznám predpis funkcie aj so všetkými deriváciami, poznám je správania úplne všade, teda pre ľubovoľne veľké t?
- Naozaj to nie je zvláštne? Nekonečná sú rôzne veľké, reálnych čísiel aj prirodzených čísiel je nekonečne veľa, no tých prvých je viac. Ako je možné, že tu zadávam prirodzené nekonečno údajov a získavam spojité nekončno predpovedí?
- V akom zmysle je reálnych čísiel viac ako prirodzených?

Krátka poznámka na záver, ako vidíte, mnohé symboly v rovniciach sú také, že ak aby sme ich aj zabudli zapísať, spomenuli by sme si. Nie je to matematicky správne, ale občas sa to robí kvôli prehľadnosti. Napríklad ak máme v rovnici funkciu $x(t)$ a všade len v čase t (takže žiadne členy ako $x(t-2\ s)$), tak niekedy pre prehľadnosť môžeme nepísať (t), teda nahradíme $x(t) \leftrightarrow x$. Treba si však dať pozor, lebo ide o iné veci – napríklad x značí súradnicu v jednorozmernom priestore, kým $x(t)$ označuje polohu bodu pohybujúcu sa v tomto priestore.

Príklady

- Ako opísať 2D pohyb po kružnici? Akú rýchlosť, veľkosť rýchlosti, zrýchlenia, veľkost zrýchlenia má teleso?

- Teleso sa pohybuje v smere osi z rýchlosťou v a pritom robí v kolmej rovine kruhový pohyb s polomerom R a uhlovou frekvenciou ω. Zapíšte jeho pohyb v súradniciach a vykreslite graf jeho rýchlosti v závislosti od v.

- Ako rýchlo sa môžeme roztočiť na detskom kolotoči tak, aby sme neomdleli?

- Ako opísať pohyb vo viacrozmernom priestore? Napríklad na sfére v 4D? (Návod: napíšte si zápis polárnych a sférických súradníc (ide o sféry v 2 a 3 rozmeroch), z nich skúste vytušiť, ako by sa dali opísať body na sfére spĺňajúcej rovnicu $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$).

- Nájdite Taylorov rozvoj funkcií $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, e^x, \cosh x, \sinh x, \log(1 + x)$ v okolí bodu $x = 0$.

- Dokážte vzťah $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ a jeho špeciálny prípad $x = \pi$ (spomeňte si, že $i = \pm\sqrt{-1}$ a teda $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, ...$ Toto dosaďte do Taylorovho radu pre e^{ix}. Vedľa si napíšte rozvoj pre $\sin x$ a $\cos x$ a skúste to spojiť dokopy). O čísle i si viac povieme neskôr.

- Zderivujte:

  1. $y = \sin x^2$,
  2. $y = x^x$,
  3. $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$,
  4. $y = \sin x \exp x$.

- Zintegrujte:

  1. $\int (e^{6x} + x^2)\, dx$,
  2. $\int x \cos 3x dx$,
  3. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x dx$.

Návod na tretí integrál: nakresliť si, čo vlastne počítame (plocha pod čím to je?). Spomeňte si, že $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a teda $\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^2 x + \cos^2\right) dx = 2\pi$.

Projekt

- Zoberte si posledný príklad na deriváciu a integrál z domácej úlohy a napíšte počítačový program, ktorý numericky spočíta deriváciu (v rôznych bodoch) a určitý integrál.

2 Pohybové rovnice a gravitácia

Diferenciálne rovnice

Diferenciálne rovnice sú rovnice, ktoré nám opisujú, ako sa niečo mení. Inak povedané, obsahujú deriváciu funkcie [2] (napríklad podľa času alebo polohy) a ich riešením je funkcia; na rozdiel od bežných rovníc, napríklad $x^2 = 2$, ktorých riešením je číslo. Najjednoduchším príkladom je $\frac{dx}{dt}(t) = 0$, jej riešením je $x(t) = c$, teda státie. Trochu zložitejším príkladom je

$$\dot{x}(t) = a\ x(t), x(0\ s) = x_0. \tag{15}$$

- Aké má riešenie? A aké jednotky má konštanta α?

Lekcia z minulej kapitoly bola taká, že ak poznáme rýchlosť telesa v čase, vieme určiť jeho polohu – to je bežne to, čo nás zaujíma. Ako sa dozvieme rýchlosť telesa? Máme fyzikálne princípy, ktoré nám ju zadávajú? Niekedy áno, vo všeobecnosti však nie. Príroda funguje zvláštnym spôsobom, nezadáva nám rýchlosti, ale zrýchlenia – a to prostredníctvom Newtonovho zákona

$$\mathbf{F} = m\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{p}} = m\ \dot{\mathbf{v}} = m\ \ddot{\mathbf{r}}, \tag{16}$$

kde **a** je zrýchlenie, **p** je hybnosť, **v** je rýchlosť a **r** je poloha. Hrubé písmo značí, že ide o vektory – tieto veličiny majú viacero zložiek, napríklad tri $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Prečo „napríklad tri" a nie presne „tri"? Lebo v princípe môžeme skúmať aj dvojrozmerné vektory, štvorrozmerné vektory a podobne. Vo fyzikálnom kontexte – hlavne v klasickej fyzike – sa primárne objavujú trojrozmerné vektory, neskôr sa však ukázalo, že sú užitočné aj viacrozmerné verzie. Napríklad poloha v časopriestore opisujeme pomocou štvorvektora, o tom si viac povieme až neskôr.

Sila **F** je súčet všetkých síl, napríklad gravitačná a odpor vzduchu, ktoré pôsobia na teleso a keď poznáme silu, poznáme zrýchlenie. Keď poznáme zrýchlenie, vieme si – integrovaním – spočítať rýchlosť. Ak vieme rýchlosť, vieme polohu – a tá nás typicky zaujíma.

- Ako príklad sa pozrime na prípad konštantnej sily $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$. Spočítajme $\mathbf{r}(t)$. Koľko počiatočných podmienok potrebujeme?

[2] Značenie sa používa rôzne. Niekedy sa píše celá derivácia ako $\frac{dx}{dt}(t)$, niekedy si to však skrátime na $\dot{x}$. Derivácie podľa polohy sa zas značia čiarkou, $u'(x)$.

- Pozrime sa na ďalší príklad, $\mathbf{F}(t) = (-g, 0, 0)$ – nájdite $\mathbf{r}(t)$ pre ľubovoľné počiatočné podmienky.

Predošlý príklad sa dá rozdeliť na tri jednoduchšie, napríklad $F_x(t) = F_{0,x} = 0$. Takže viem najprv vyriešiť rovnicu pre x-ovú zložku, potom pre y-ovú a potom pre z-ovú. Takýto luxus nemáme vždy, napríklad pri sile $\mathbf{F}(t) = -\alpha\mathbf{v}(t)v(t)$ mám pre x-ovu zložku

$$F_x = -\alpha v_x \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{1/2}, \tag{17}$$

Takže pre riešenie x-ovej zložky potrebujem poznať $v_y = \dot{y}$. Aby som však poznal $y(t)$, potrebujem vyriešiť y-ovú rovnicu, tá však obsahuje x – to však práve hľadáme! Pri takýchto neoddeliteľných rovniciach musím riešiť všetky tri zložky.

- Za istých okolností môže byť jedna z týchto rovníc ľahká. Za akých?

To dá riešiť rôznymi spôsobmi, napríklad – správne si tipnem riešenie (vzácny prípad). Iná možnosť je, že použijem iné súradnice (napríklad sférické), v ktorých sa ukáže, že rovnice vlastne nie sú previazané. Často nezaberá nič, rovnice však môžeme riešiť numericky na počítači.

Gravitačná sila

Asi najzámejšou silou je Newtonova gravitačná sila

$$\mathbf{F} = \kappa \frac{m\ M\ \mathbf{r}}{r^3}. \tag{18}$$

- Prediskutovať, čo je to úniková a čo orbitálna rýchlosť.
- Čo je κ?
- Ako na ňu prišiel?
- Prečo cítia kozmonauti beztiažový stav.

Jednoduchý príklad je pohyb v homogénnom gravitačnom poli.

- Kde platí takéto priblíženie?

Newtonov gravitačný zákon dáva pre dve telesá tri previazané diferenciálne rovnice, ktoré na prvý pohľad vyzerajú byť problematického typu (nedajú sa riešiť postupne). Problém je však iba zdanlivý, ak využijem symetrie úlohy (napríklad rotačnú) a zákony zachovania, úloha sa výrazne zjednoduší. Vo výsledku sa ukáže, že krivky, ktoré opisujú telesá pri pohybe v gravitačnom poli okolo centrálneho telesa (presnejšie polohový vektor voči ťažisku), sú jednoduché kužeľosečky. Vďaka symetriám sa zdanlivo zložité rovnice krásne zjednodušili. Ak sa však pokúsime riešiť rovnice pre gravitačné pôsobenie troch telies, začne byť situácia beznádejne zložitá.

- Existujú aj príklady, kde sa pod vplyvom gravitácie pohybujú tri telesá a vo výsledku je pohyb jednoduchý. Premyslite si nejaký príklad a vysvetlite, prečo funguje jednoducho.

V niektorých prípadoch vo fyzike nie je dôležitá samotná sila, ale to, ako rýchlo sa sila mení v priestore.

- Ako vznikajú prílivy? Ako často sa opakujú?

Prílivová (alebo slapová) sila sa pôsobiaca na teleso rozmeru δr sa dá ľahko odvodiť:

$$m\mathbf{a}_t = -\frac{\mathbf{r}}{r}\kappa\frac{mM}{r^2}\frac{1}{\left(1 \pm \frac{\delta r}{r}\right)^2}. \tag{19}$$

- Ako?

- Môže nás gravitačná sila zabiť? Môže nás slapová sila zabiť?

- Ako táto sila spôsobuje prílivy a prečo je na nás Mesiac natočený stále rovnako? Prečo sa vzďaluje?

Príklady

- Vyriešte:

  1. $\dot{x} = a/t, x(1\ s) = 3\ m$,
  2. $\ddot{x} = ax, x(0\ s) = 1\ m, \dot{x}(0s) = 0\ ms^{-1}$, pre $a > 0$,
  3. $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$. Návod: skúste polárne súradnice.

- Aký veľký rotujúci cylinder by vytvoril vhodnú gravitáciu odpovedajúcu pozemskej?

- Prevŕtame Zem a budeme sa tváriť, že nie je problém s tlakom a teplotou. Ako by prebiehal pád takýmto tunelom? A aká by bola v strede hustota vzduchu (odhad)?

- Ako rýchlo by sa musela točiť Zem, aby ste na rovníku nič nevážili?

- Aká veľká gravitačná sila pôsobí vo vnútri Zeme?

- Numericky vyriešte problém lineárneho harmonického oscilátora, $F_x = -kx$, pomocou Eulerovej metódy. (Návod: Máte 4 stĺpce: čas, poloha, rýchlosť, zrýchlenie. Do prvého riadku zadáte počiatočné podmienky. V druhom riadku spočítate rýchlosť pomocou zrýchlenia z prvého riadku ($v(t_2) = v(t_1) + a(t_1) \times \Delta t$) a podobne polohu ($x(t_2) = x(t_1) + v(t_1) \times \Delta t$), a tak ďalej pre ďalšie riadky. Tento príklad je veľmi dôležitý, určite si ho spravte.

- Vystrelím z pušky rovno a odpor vzduchu zanedbám. Za koľko dopadne náboj? A ako ďaleko?

- Numericky vyriešte úlohy pre pád (napríklad strela z pušky) s odporom vzduchu.

- Vráťme sa k príkladu s otázkou, že ako rýchlo by sa musela točiť Zem, aby sme sa cítili beztiažovo na rovníku. Prvá otázka: o koľko väčšia sila by pôsobila na vaše nohy než na vašu hlavu? Druhá otázka: neutrónové hviezdy sú známe prudkou rotáciou. Aká je gravitačná sila na ich povrchu a koľko z nej „uberie” odstredivá sila na rovníku?

- Aké dlhé lano sa udrží svojou vlastnou odstredivou silou? (Priviazané o Zem.) (Návod: musí nastať rovnováha síl. Rozmýšľajte o lane ako o súčte malých úsekov, na každý pôsobí odstredivá a gravitačná sila, celkovo sa musia sčítať na rovnakú hodnotu, ale opačné znamienko.)

Projekty

- Vyriešiť Keplerov problém numericky a otestovať stabilitu riešenia.

- Numericky vyriešiť pohyb kyvadla s odporom vzduchu. Riešenie overiť, napríklad pomocou kamery na mobilnom telefóne.

- Prečo nemá Newtonov pohybový zákon prvú alebo tretiu deriváciu?

3 Pohyb tuhého telesa

3.1 Translačný pohyb

Doteraz sme sa zaoberali pohybom jedného hmotného bodu, teda niečoho, čo má svoju hmotnosť, ale nemá velkosť. Reálne objekty sú zložité, tvorené z mnohých atómov, ktoré sa môžu preskupovať a väzby medzi nimi sa môžu deformovať a preusporiadavať. Tuhé teleso je abstrakcia telesa, ktorá je zložitejšie ako hmotný bod – zaberá objem – no je v niečom zjednodušená, teleso sa nedoformuje. V princípe sa teda stačí obmedziť na dva druhy pohybu: teleso sa pohybuje ako celok a môže ako celok rotovať.

Každý bod, z ktorého sa skladá tuhé teleso, sa riadi Newtonovými pohybovými rovnicami. Na každý z nich pôsobia sily zvonku telesa – napríklad gravitačná sila – a zároveň sily od ostatných bodov v telese. Keď spočítame všetky sily, ktoré pôsobia na teleso ako celok, externé sily sa sčítajú dokopy a vnútorné sa navzájom vyrušia.

- Prečo?

Dokopy teda máme [3]

$$\mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \rightarrow \sum_i \mathbf{f}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \tag{20}$$

kde $\mathbf{f}_i$ je sila pôsobiaca na i-ty bod. Toto sa dá napísať ako

$$\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{r}}, \tag{21}$$

kde $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_i$ je celková sila pôsobiaca na teleso, $M = \sum_i m_i$ je jeho celková hmotnosť a $\mathbf{r} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$.

- Ako sa volá kombinácia $\frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$ a čo reprezentuje?
- Ako by ste našli výraz z predchádzajúcej poznámky u reálneho telesa?
- Prečo sa v súčte objavujú len externé sily pôsobiace na teleso?

[3] Suma ide cez všetky body telesa.

3.2 Rotačný pohyb

Ťažisko sa vlastne v mnohom správa ako hmotný bod s hmotnosťou celého telesa. Okrem pohybu celého ťažiska môže objekt rotovať. Na to, aby sa teleso roztočilo potrebujeme silu, ktorá pôsobí kolmo na os rotácie (s nenulovým ramenom).

- Ako veľmi roztočí koleso, keď do neho tlačíte v smere k osi, kolmo na ňu a niečo medzi? Situáciu si prípadne nakreslite.

Užitočný príklad pohybu je rotácia objektu okolo fixnej osi. V tomto prípade platí, že rýchlosť i-teho bodu je $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, kde $\boldsymbol{\omega}$ má smer osi a veľkosť kruhovej frekvencie a $\mathbf{r}_i$ je polohový vektor daného bodu.

Kým sa pohneme ďalej, krátka matematická poznámka, už sa nám nenápadne objavili dva typy násobenia vektorov, mali sme skalárny súčin, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (napríklad bol ukrytý v $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$) a teraz vektorový súčin $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Sú medzi nimi dva rozdiely:

1. Kým výsledok prvého je číslo (skalárna, teda jednorozmerná veličina), výsledkom druhého je vektor (teda trojrozmerná veličina),

2. skalárny súčin je symetrický, teda $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, kým vektorový súčin je antisymetrický, teda $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Užitočný pojem na opis rotačného pohybu je moment hybnosti

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{22}$$

ktorý nesie aj informáciu o tom, ako ďaleko sa teleso nachádza od osi rotácie a aj akú má hybnosť. Užitočná veličina je moment sily, definovaný – nie náhodou – podobne

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{23}$$

Teraz krátky fyzikálny komentár. Medzi hybnosťou a silou máme Newtonov zákon $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$. Z týchto veličín sme rovnakým spôsobom zadefinovali nové veličiny (momenty) a tak sa asi dá tušiť, že aj medzi nimi mohol existovať jednoduchý súvis. Ako ho nájsť? Zoberme Newtonov pohybový zákon a prenásobme ho (vektorovo) s $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \to \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \to \mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}. \tag{24}$$

- Overte to spočítaním $\dot{\mathbf{L}}$.

Moment sily $\mathbf{M}$ a moment hybnosti $\mathbf{L}$ sú dôležité. Znova však bude treba premyslieť, ako správania jedného bodu v tuhom telese prepočítať na správania mnohých.

- Prečo sa zachováva moment hybnosti pri Keplerovskom pohybe?
- Je teraz Keplerov zákon o plochách obežníc očividný?
- Ako by ste sformulovali zákon zachovania momentu hybnosti?
- Ako by ste ľudsky vysvetlili princíp krasokorčuliarky? Prečo funguje?

Pre tuhé teleso platí

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i = \dot{\mathbf{L}} \tag{25}$$

- Ako vidno, že aj v tomto prípade sa efekt vnútorných síl navzájom vyruší?

Takže si to zhrňme, zadefinovali sme si šikovné veličiny: moment sily a moment hybnosti, ktoré spĺňajú ekvivalent Newtonovho pohybového zákona. Kým (translačný) pohyb hmotného bodu je opísaný rýchlosťou, rotácia je opísaná kruhovou frekvenciou ω (prípadne vektorom $\boldsymbol{\omega}$, ktorý nesie informáciu o natočení osi rotácie). Prirodzene sa núka otázka, keď máme jednoduchý vzťah medzi hybnosťou a rýchlosťou, existuje aj jednoduchý vzťah medzi momentom hybnosti a kruhovou frekvenciou? Začnime znovu jedným bodom, ktorého rýchlosť je kolmá vzhľadom na polohový vektor:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\ \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\ \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m r_T^2 \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega}, \tag{26}$$

kde sme zadefinovali moment zotrvačnosti $I = m r_T^2$ a r_T je vzdialenosť bodu od osi rotácie (takže napríklad ak je rotácia okolo z-ovej osi, tak $r_T^2 = x^2 + y^2$). Ak je bodov viac, vieme túto výpočtovú gymnastiku zopakovať rovnako a všetko spočítať dokopy:

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} \tag{27}$$

kde teraz $I = \sum_i m_i \mathbf{r}_{T,i}^2$. Vzniká nám teda pekný prekladový slovník medzi pojmami opisujúci translačný pohyb a rotáciu.

- Takže si zopakujme, čo v prípade rotácie odpovedá rýchlosti, hybnosti, sile a hmotnosti?

Na záver si overme, že veci naozaj pekne sedia dokopy. Pre pohyb hmotného bodu máme kinetickú energiu danú ako $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Vzorec pre rotačnú energiu si vieme asi aj tipnúť:

$$E_R = \frac{1}{2} I \ \omega^2. \tag{28}$$

- Prečo? Ako by sme to odvodili poriadne?

Zatiaľ sme riešili iba pekná rotácie. Zoberme si ako príklad škaredej rotácie tyčku, na ktorej je prilepený disk, ale nakrivo – jeho os nie je rovnobežná s tyčkou. Systém roztočíme okolo osi danej tyčkou a intuitívne cítime, že sa nám to bude celé triasť a musíme pôsobiť silou, aby sme tyčku udržali v takomto pohybe. Dôvod? Moment hybnosti nemá rovnaký smer ako vektor kruhovej rýchlosti.

- Prečo?

Matematický opis rotácie

Polohu opisujeme ako vektor, teda $N-$ticu čísiel, N je počet rozmerov. V našom svete je teda $N = 3$, niekedy nám stačí dvojrozmerná plocha a tak berieme $N = 2$. S vektormi $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ a $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vieme robiť tri operácia: sčítanie a dva druhy násobenia – tie sme už rozoberali.

Všebecná (lineárna) transformácia vektora má tvar

$$\mathbf{A}' = M\mathbf{A}, \tag{29}$$

kde M je 3×3 matica. Vo všeobecnosti môže takáto operácia vektor otočiť a natiahnuť.

- Čo je na lineárnej transformácii lineárne?

- Za akých podmienok je táto operácia obrátiteľná?

- Ako vyzerá matica, ktorá vektor iba natiahne?

- Ako vyzerá matica rotácie v dvoch rozmeroch? Dá sa to ľahko odvodiť (návod, zamyslite sa, ako sa zmení poloha bodu zapísaná v polárnych súradniciach).

Matice rotácie v troch rozmeroch vyzerajú ako

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Vo fyzike používame pri transformáciách objekt zvaný komutátor

$$[A, B] = A.B - B.A. \tag{33}$$

- Aká je jeho interpretácia?

Pre malé otočenia platí zaujímavá vlastnosť, $[R_x, R_y] \sim R_z$.

- Ako sa to dá predstaviť?

Teraz si spravíme úplne nepredvídateľnú odbočku. Ľudia dlho poznali reálne čísla, následne boli milo prekvapení, že sa dajú rozšíriť na čísla komplexné, $a + ib$, kde $i^2 = -1$; viac sa o nich budeme rozprávať neskôr. Prirodzená otázka bola, či existujú aj číselné trojičky, niečo na štýl $a+ib+jc$. Dlho sa snažili a nedarilo sa. Rowan Hamilton, kráčajúc z domu do Trinity college dostal geniálny nápad, ktorý rovno vyrezal do neďalekého mosta Broomsbridge. Tabuľa, ktorá je na ňom dodnes, ukazuje

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{34}$$

- Príklad: Spočítajte $[i, j] = ij - ji$.

Tieto čísla sa volajú kvaternióny. Prečo asi? Existujú ešte oktonióny a to je všetko [4]. Kvaternióny sa správajú podobne ako rotácie, viď ostatný príklad.

Táto poznámka slúžila ako malý exkurz do matematickej mysle. Matematici často hľadajú objekty so zaujímavými vlastnosťami a tie potom skúmajú ďalej. Čo je to zaujímavá vlastnosť? Taká, ktorá nám je užitočná na opis procesov v prírode. Rotácie objektu majú vlastnosť, že nekomutujú – nie je jedno, či najprv spravím prvú operáciu a potom druhú alebo naopak. Preto na opis rotácie potrebujem objekt, pre ktorý neplatí $ab = ba$. Jednoduché čísla nedokážu trojrozmernú rotáciu zachytiť, matice či kvaternióny to však dokážu – nekomutatívnosť je ich kľúčovou vlastnosťou.

Matice rotácie sú objekty, ktoré odpovedajú (v našej interpretácií) nejakým procesom, transformáciám či úkonom. Keď môžem s telesom spraviť jednu transformáciu – napríklad otočiť ho okolo osi z o $1°$ – tak môžem potom spraviť ďalšiu transformáciu – napríklad otočiť okolo tej istej osi o $1°$ – tak je výsledkom stav, ktorý by som dostať jednou transformáciou: jedna rotácia o $2°$. Operácie môžem teda skladať dokopy.

V matematike pre takéto objekty vznikol koncept *grupy*. Stručne povedané, grupa je množina prvkov, ktoré môžeme spájať a dostaneme objekt rovnakého typu. A čo viac, táto množina obsahuje prvok nič-nerobenia (v našom príklade je to otočenie o $0°$) a ku každému prvku obsahuje opačný prvok, ktorý jeho pôsobenie odrobí (otočenie o rovnaký uhol, ale opačným smerom).

- Prediskutujte, ako rotácie v dvoch rozmeroch tvoria grupu.

- To isté, ale pre rotácie v troch rozmeroch.

Kým grupu rotácií v dvoch rozmeroch voláme komutatívna, grupu rotácií v troch rozmeroch voláme nekomutatívna, asi je jasné, prečo [5].

- Tvorí sčítavanie čísiel grupu?

- Tvorí násobenie reálnymi číslami grupu?

- Čo musíme spraviť, aby ju tvorilo?

[4] Vraví Hurwitzov teorém.

[5] V literatúre to však často nájdeme pod pojmami abelovské a neabelovská grupa, meno je od Nielsa Henrika Abela, ktorý tieto štruktúry skúmal.

Drobná poznámka na záver, grupa ako taká je abstraktný pojem – je to množina prvkov a návod, ako ich spájať dokopy tak, aby spĺňali požadované vlastnosti. Matice rotácie už tvoria konkrétnu realizáciu (alebo správne povedané reprezentáciu) tejto abstraktnej entity. Kvaternióny sú iná reprezentácia rotácií (ktorá obsahuje ešte istý háčik).

Máme teda tri rôzne úrovne toho istého: rotácia ako fyzikálny proces, ako (napríklad) matica a ako abstraktný pojem. Práve prechod do abstraktnej roviny nám často umožní skúmať rôzne zovšeobecnenia *zaujímavých* vecí, ktoré sme objavili a v princípe tak môžeme objavovať nové *zaujímavé* veci, ktoré by sme inak prehliadli. Napríklad, interakcie elementárnych častíc sú opisované cez grupové štruktúry, takže ak by sme sa nad abstraktnou esenciou (napríklad) rotácií nikdy nezamysleli, je možné, že by sa nám fundamentálne zákony objavovali oveľa náročnejšie na uchopenie.

Príklady

- Po naklonenej rovine sa valí valec. Náklon roviny je 30°, polomer homogénneho valca je 10 cm, hmotnosť 1 kg a dĺžka 30 cm.
- Prečo sa zastaví valiace sa koleso? Akým smerom na neho pôsobí sila? Ako rýchlo sa zastaví drevené koleso na drevenej podlahe?
- Ako si môže človek na kolotoči sám hádzať loptičku? Vymyslite realistický scenár. Aká sila to umožňuje?
- Máme železnú tyč o dĺžke 1 m. Aký je rozdiel jej momentu zotrvačnosti pri rotácii okolo stredu a okolo jej konca.
- Napíšte matice rotácie v 3D pre malý uhol α (pre ktorý $\sin\alpha \approx \alpha$ a $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$), spočítajte $[R_x(\alpha), R_y(\alpha)]$ a porovnajte s $R_z(\alpha^2)$.
- Aký je moment zotrvačnosti nášho Slnka a neutrónovej hviezdy?

Projekty

- Spracovať ako presne sa kvaternióny využívajú na opis rotácií.
- Spracovať tému grupy Rubikovej kocky (množina všetkých operácií, ktoré sa s ňou dajú robiť).

- Vysvetliť teorém tenisovej rakety.
- Pri rotáciách platí zaujímavé tvrdenie. Každé teleso má tri pekné osi, okolo ktorých keď rotuje, tak platí, že smer momentu hybnosti je rovnaký, ako smer vektora kruhovej rýchlosti. Cieľom projektu je spracovať teóriu ohľadom tohto tvrdenia.

4 (Silové) polia

4.1 Silové polia

Pri opise gravitačného zákona (18) sme narazili na výraz, ktorý matematicky opisoval situáciu, kedy sme do vzdialenosti r od seba umiestnili dve telesá. Ak jedno z týchto telies držím na mieste a druhým hýbem, sila, ktorá na neho pôsobí sa bude meniť. V princípe, pre každý bod priestoru (okrem toho, kde sedí prvý bod) viem takto určiť silu, ktorá by na druhé teleso pôsobila, ak by som ho do tohto bodu umiestnil. A čo viac, viem povedať, čo by sa stalo, ak by som tam umiestnil objekt s inou hmotnosťou. Matematicky je to triviálna vec:

$$\mathbf{F}_G = m\ \mathbf{G}, \tag{35}$$

kde $\mathbf{G} = \frac{\kappa M \mathbf{r}}{r^3}$ nazveme gravitačné pole.

- Zaviesť takýto pojem je veľký intelektuálny skok, prečo?

Všimnite si, že $\mathbf{G}$ už závisí len od hmotnosti prvého telesa a jeho vzdialenosti od bodu, kde nás gravitačné pole zaujíma. Až keď pridám informáciu o druhom bode (jeho polohu a hmotnosť), viem spočítať silu, ktorá na neho bude pôsobiť. Matematicky je to triviálna operácia, zo sily sme vytiahli hmotnosť jedného z telies a zbytku, ktorý ostal, sme dali meno. Konceptuálne sa však udial pomerne veľký krok. Pôvodný pohľad bol taký, že prvé teleso k sebe priťahuje druhé. Nový pohľad hovorí, že prvé teleso všade v priestore vytvára gravitačné pole a ak sa niekde v tomto poli vyskytuje iná hmotná častica, bude cítiť silu danú gravitačným polom a jej hmotnosťou.

- Ako by vyzerala situácia pre tri častice?
- Mám jednu časticu v prázdnom vesmíre, vytvára pole? Vieme to overiť?

Sú polia skutočné alebo je to len matematický nástroj, ktorý nám v niektorých príkladoch zjednodušuje život a umožní nám naraz zvažovať rozdielne situácie, napríklad gravitačnú silu pôsobiacu na rôzne hmotné telesá? Sú fyzikálne polia skutočné? Toto je možno trochu filozofická otázka, no neskôr sa vo fyzike ukázalo, že polia sú dynamické veličiny, ktoré majú svoje vlastné pohybové rovnice a vieme im priradiť vlastnosti ako hybnosť či energia, takže je asi celkom rozumné sa na ne nepozerať cez prsty.

Existuje aj iný pohľad – a ten je dôvodom, prečo sa pri zdanlivo jednoduchom úkone zastavujeme toľko odstavcov. Predstavte si, že máme fyzikálne zaujímavú veličinu A a zistíme, že sa dá napísať v tvare $A = B \cdot C$. Je aj B (či C) fyzikálne zaujímavé? Nie nutne, niekedy však áno. Dôvody sú dva. Po prvé, vo fyzike máme často redukcionistický prístup. Možno niekedy narazíme na hranicu, ale zatiaľ sa nám celkom dobre darilo s prístupom, že sme sa pozreli na systém a jeho vlastnosti a položili si otázku, že z akých jednoduchých dielikov sa a môže tento systém skladať a akými pravidlami sa musia riadiť, aby viedli na to, čo pozorujeme. Očividný príklad je hmota, ktorá sa skladá z atómov. Aké vlastnosti majú atómy a molekuly vzduchu, aby mal vzduch v miestnosti práve takýto tlak? Iný príklad by mohol byť jas hviezd, ktoré pozorujeme. Ten je výsledkom aspoň dvoch faktorov, po prvé skutočného jasu hviezdy a po druhé tlmenia prachom a plynom, ktorý sa okolo nej nachádza. Výsledok je daný súčinom týchto faktorov, každý z nich však má inú príčinu a riadi sa inými zákonmi a tak je užitočné ich rozdeliť.

Dalo by sa zájsť ešte o krok ďalej. Čo je našim cieľom vo fyzike? Hľadať a nachádzať vysvetlenia. Ak nám nejaký matematický objekt umožní sformulovať vysvetlenie, ktoré je jednoduchšie, univerzálnejšie či elegantnejšie, je to užitočný výraz. Mnohé vlastnosti gravitácie sa lepšie vysvetľujú, chápu či analyzujú pomocou pojmu gravitačné pole a tak má delenie (35) vo fyzike zmysel. To, že sa neskôr ukázalo, že o veličinu, ktorá si tak trochu žije vlastným životom, to len potvrdilo.

- Nájdete iné užitočné príklady redukcionizmu?
- Poznáte ďalšie príklady užitočných silových polí?
- Poznáte nejaké príklady užitočných nesilových polí?

4.2 Diferenciálne operátory

Vektorové pole je vektor, ktorého komponenty môžu závisieť od polohy v priestore. Inými slovami, je to súbor vektorov zadefinovaných v každom bode priestoru. Napríklad v trojrozmernom priestore je vektorové pole dané ako trojica funkcií troch súradníc; napríklad polohový vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je vlastne vektorové pole. Môžeme hocijakú trojicu funkcií označiť za vektorové pole? Nie. Vektorové pole má totiž dôležitú vlastnosť, jeho zložky sa medzi sebou pri inom výbere súradníc miešajú konkrétnym spôsobom. Takže napríklad z pohľadu súradníc, ktoré sú voči pôvodným otočené okolo osi z máme iný polohový vektor

$$(x', y', z') = (\cos\alpha x - \sin\alpha y, \cos\alpha y + \sin\alpha x, z)\,, \tag{36}$$

čiže zložky vektora sa pri rotácií pomiešali. Ak by som však zobral trojicu polí (P, ρ, T), teda tlak, hustotu a teplotu bodov v tejto miestnosti, nenazvali by sme to vektorovým poľom, napríklad aj kvôli tomu, že kombinácia $(\cos\alpha P - \sin\alpha\rho, \cos\alpha\rho - \sin\alpha P, T)$ nedáva zmysel. Takže ak by vektorové polia potrebovali marketingové motto, mohlo by znieť: Viac, než len trojica funkcií.

Ak máme pole, ktoré má len jednu zložku, tak ho voláme skalárne pole – to sa voči rotáciám nemení. Príkladom môže byť pole teplôt v miestnosti. Ak pichnete teplomer na nejaké miesto, ukáže rovnakú teplotu, ak dáte teplomer dole hlavou (a špička zostane na tom istom mieste).

- Čo sa pri rotácii udeje s gravitačným poľom?

Keď sme mali jednu funkciu opisujúcu fyzikálnu veličinu, napríklad polohu či rýchlosť hmotného bodu v jednom rozmere, ukázalo sa, že je celkom užitočné – v rôznych fyzikálnych kontextoch – tieto funkcie derivovať a integrovať. Umožnilo nám to zachytávať zmenu danej veličiny a naopak sčítavať malé zmeny dokopy. Fyzika sa na svet pozerá (časopriestorovou) lupou – hovorí nám, čo sa deje v konkrétnom bode či krátkom časovom okamžiku. Nás však často zaujíma celková prejdená vzdialenosť, trvanie javu či objem telesa. Niekedy sa pozeráme na drobnú zmenu, niekedy na celok – a derivácie a integrály nám umožňujú prechádzať medzi týmito pohľadmi.

Takže prichádza prirodzená otázka: Ako derivovať a integrovať vektorové polia? Pozrieme sa najprv na prvú časť.

Derivácia podľa času

Jedna vec je jednoduchá a už sme ju zažili – derivácia podľa času. Tu platí, že sa vlastne nedeje nič zaujímavé. Derivácia vektorového poľa podľa času získame derivovaním jeho jednotlivých zložiek.

$$\dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{A}_x, \dot{A}_y, \dot{A}_z\right). \tag{37}$$

Po príklady nemusíme chodiť ďaleko, rýchlosť častice v troch rozmeroch je predsa $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

- Ako sa prejaví odpoveď na predošlú otázku na Newtonovom pohybovom zákone?

- Niekedy máme transformáciu, ktorá závisí od času, napríklad $\mathbf{v}‘ = R(t)\mathbf{v}$, ako sa to prejaví na derivovaní? Aké prejavy to má fyzikálne ak sa otáča polohový vektor (rotujúca vzťažná sústava)?

Divergencia

Presuňme sa teraz k deriváciám podľa priestorových súradníc, tie sú na výber tri (v trojrozmernom priestore). Je teda prirodzené zadefinovať takýto operátor (operátor je niečo, čo pôsobí na funkcie, polia, ...):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \tag{38}$$

vyzerá to ako vektor, vo vnútri však nemá čísla alebo funkcie ale derivácie. Jeho názov, ∇, sa číta nabla (grécko slovo *nebel* označuje harfu, ktorý tvar tohto operátora pripomína).

- Aký je rozdiel medzi $\frac{d}{dx}$ a $\frac{\partial}{\partial x}$? Možno sa to trochu ľahšie vysvetlí na príklade s časom, t.

Máme teda jeden objekt, ∇, ktorý sa núka ako vhodný kandidát na skúmanie priestorových zmien vektorových polí. Ako ho pustiť na vektorové pole $\mathbf{A}$? Keďže vyzerá ako vektor, tak si môžeme zaspomínať, ako spojiť dva vektory dokopy. Jednou z možností je skalárny súčin

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \tag{39}$$

Tento operátor, div $= \nabla\cdot$, voláme divergencia. Latinský pôvod slova divergovať je pohybovať sa alebo smerovať rôznymi smermi. Divergencia poľa je nulová ak všade mieri rovnaký smerom a veľkosťou a nenulové, ak vektory mieria do seba alebo od seba. Alebo aj trochu prísnejšie povedané, divergencia nám hovorí, či vektorové pole v danom mieste vzniká alebo zaniká. Je dôležité si všimnúť, že pôsobením divergencie na vektorové pole získame pole skalárne.

- Nakreslite si vektorové polia $\mathbf{r}, -\mathbf{r}, (1, 2, 4)$, spočítajte ich divergenciu a výsledok okomentujte.

Rotácia

Druhý zaujímavý súčin bol vektorový, takže prirodzene sa nám objavuje aj druhý diferenciálny operátor, ktorý dokáže pôsobiť na vektorové polia. Ďalší významný diferenciálny operátor sa volá rotácia

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} . \tag{40}$$

Rotácie púšťame na vektorové polia a ich výsledkom je znovu vektorové pole, ktoré nesie informáciu o tom, či dané vektorové pole rotuje. Výsledkom rotácie je nové vektorové pole.

- Zoberte vektorové polia $\mathbf{r}, (1,2,4), (-y,x,0)$ a spočítajte ich rotáciu. Aký smerom mieri rotácia?

Gradient

Doteraz sme mali dva operátory, ktoré sme púšťali na vektorové polia a dostávali z nich buď skalárne alebo vektorové polia. Teraz budeme mať operátor, ktorý pôsobí na niečo, čo vektorovým polom nie je, ale vytvára ho.

- Ako by takýto operátor mohol vyzerať?

Tento operátor voláme gradient a jeho definícia je takáto:

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \mathbf{A}, \tag{41}$$

kde f je skalárne pole, teda jedna funkcia (troch premenných). Ako názov napovedá, gradient nám hovorí, ktorým smerom sa funkcia mení.

- Spočítajte gradient z nasledovných skalárnych polí: $1, \frac{1}{r^2+a_0^2}, x^2+2y^2$.

Začínate asi tušiť, čo sa môže diať. Začneme s obyčajným skalárnym poľom, potom z neho spravíme gradientom vektorové pole a potom na neho pustíme operátor, ktorý pôsobí na vektorové polia. Takéto sa vo fyzike objavuje často.

- Spočítajte div grad f a rot grad f.

Ďalšie možnosti

Možno sa pýtate, nedal by sa vytvoriť zaujímavý operátor tak, že otočím definíciu divergencie? Teda zobrať $\mathbf{A} \cdot \nabla$? Dal. Kým pri skalárnom súčine je jedno v akom poradí máte vektory, derivácia je citlivá na to, či ide pred alebo za násobením funkciou.

- Prečo?

Takže výsledkom takéhoto spojenia je operátor $\mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$. Takýto objekt sa vo fyzike sem-tam objaví, avšak asi menej často ako samotná divergencia.

Iná zaujímavá možnosť je spojiť dva ∇ operátory dokopy. Ich vektorový súčin je zbytočný.

- Prečo?

Ich skalárny súčin však dáva niečo zaujímavé, takzvaný Laplaceov operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{42}$$

Tento operátor môžeme pustiť na skalárne aj vektorové pole.

- Čo bude výsledkom?

Rôznych vektorových operátorov sa dá samozrejme navymýšľať aj viac, prešli sme cez najvýznamnejšie a najužitočnejšie z nich.

4.3 Gaussova a Stokesova veta

Užitočným nápadom sa ukázalo priradiť vektorové polia objektom, v ktorých by sme možno na prvý pohľad žiadne vektory nehľadali – pri krivkách a plochách. Čo je to krivka (v troch rozmeroch)? Rozumný prvý nápad znie, že je to parametrizovaná spojitá množina bodov

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))\,. \tag{43}$$

Len takáto definícia by mohla byť problematická.

- Prečo?

Táto definícia by napríklad pre $x(t) = y(t) = z(t) = c$ netvorila krivku ale jeden bod. Popis krivky je sugestívne napísaný tak, aby opisoval trajektóriu hmotného bodu a aby to bola krivka, bod nemôže stáť. A keď už sa pohybuje, tak ideálne konštantou rýchlosťou a konečný čas (ak je krivka konečná). Takáto predstava už je takmer presná, treba by si možno premyslieť, čo s nehladkými krivkami – nám však táto predstava postačuje.

- Ako to zadefinovať matematicky?

Keď o krivke premýšľame ako o trajektórii bodu, sú jej dve kľúčové vlastnosti úplne prirodzené. Po prvé, v každom bode krivky môžeme zadefinovať vektor rovný rýchlosti častici v danom bode. Takže ak máme nejaký krátky úsek čiary s dĺžkou dl, vieme z neho spraviť vektor $\mathbf{dl} = \mathbf{n}_T dl$, kde $|\mathbf{n}_T| = 1$ je dotyčnicový vektor.

- Ako by ste ho spočítali pre nejakú krivku a ako jeho dĺžka súvisí s interpretáciou krivky ako trajektórie častice?

Prirovnanie k trajektórií častice berte len ako pomôcku, takéto vektorové pole sa využíva aj tam, kde sa žiaden pohyb nedeje. Dôležité zistenie je však také, že krivke viem priradiť jednoznačné vektorové pole, ktoré je na nej zadefinované.

- Nakreslite si jednu cvičnú krivku a toto vektorové pole na nej.

Podobne je užitočné priradiť vektorové pole ploche. Plocha ja parametrizovaná dvojicou parametrov, preto nám interpretácia s trajektóriou hmotného bodu už neposlúži. Pri ploche sa však núka iný prirodzený smer, v prípade krivky to bol smer dotyčnice, v prípade plochy je to smer kolmice. Takže každému malému elementu s plochou dS vieme priradiť vektor $\mathbf{dS} = \mathbf{n}_N dS$, kde $|\mathbf{n}_N| = 1$ je vektor kolmý na danú plochu.

Prečo kolmý a nie rovnobežný? Po prvé je to otázkou jednoznačnosti. Na danú plochu je jeden smer pre kolmý vektor, no nekonečne veľa pre dotyčnicové. Po druhé je to vecou užitočnosti, pri ploche nás často zaujíma tok niečoho skrz túto plochu a práve tento kolmý vektor ukazuje smerom optimálneho prúdenia cez plochu. Takto vytvorené vektorové pole si môžete predstaviť ako ježka – vektory trčia von z plochy.

- Nakreslite si jednu cvičnú plochu a vektorové pole na nej.

V matematike vieme integrovať po krivke, ploche či objeme, niekedy sa nám pod integrálom objavuje obyčajná funkcia a v niektorých prípadoch, ako sme prediskutovali, je tam vektorové pole (či súčin s ním). Niekedy nás zaujímajú objemové integrály, napríklad keď integrujeme hmotnostnú hustotu cez objem, získame celú hmotnosť telesa. Niekedy integrujeme cez plochu aby sme získali celkový prietok nejaké poľa, napríklad chceme spočítať, koľko vody preteká daným prierezom. Existujú dve veľmi užitočné rovnosti, ktoré nám prepájajú rozdielne typy integrálov. Na čo je to užitočné sa dozvieme čoskoro.

Gaussova veta

Gaussova veta spája integrál po uzavretej ploche s tým, čo sa deje vo vnútri tohto objemu:

$$\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = \int \mathrm{div}\ \mathbf{A}\ dV, \tag{44}$$

občas by niekto použil značenie $\oint$ aby pripomenul, že integrál sa robí po uzavretej ploche, my si to budeme pamätať [6]. Pozrime sa, čo táto rovnica hovorí. Na ľavej strane máme vektorové pole, ktoré prechádza cez plochu.

- Ako musí byť $\mathbf{A}$ voči $\mathbf{dS}$ natočené, aby bol skalárny súčin čo najväčší?

Ak by som si pod vektorovým poľom $\mathbf{A}$ predstavil napríklad rýchlostné pole tekutiny, tak ľavá strana mi hovorí, koľko tekutiny preteká (či vyteká) cez plochu. Čo opisovala divergencia? Vznik alebo zánik (zbiehanie alebo rozbiehanie) vektorov. Pravá strana mi teda hovorí, či vektory vo vnútri zanikajú alebo vznikajú.

- Skúste si vymyslieť nejaké netriviálne vektorové pole, obaľte ho sférickou plochou a zhodnoťte, čo sa deje.

Keď si Gaussovu vetu vyjadríte v ľudskej reči, jej matematická formulácia by mala byť jasná.

- Je?

[6] Ľudia bežne používajú tento symbol skôr pre integrál po uzavretej slučke.

Stokesova veta

Blízkym príbuzným Gaussovej vety je Stokesova veta, spája integrál po ploche s integrálom po krivke.

$$\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}. \tag{45}$$

Integrujeme po uzavretej krivke a uvažujeme tok cez ľubovoľnú plochu, pre ktorú je táto krivka hranicou. Takže ako krivku si predstavte uzavretý motúzik a na ňom natiahnutá mydlová bublina je plocha, cez ktorú integrujeme.

Krátky komentár k možnej aplikácií týchto dvoch rovníc. Predstavte si, že sa o tomto svete dozviete, že pre ľubovoľnú krivku platí, že $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$. Čo vám táto skutočnosť hovorí o $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$? To je takto ťažko viditeľné. Ak však aplikujeme Stokesovu vetu, zrazu vidíme, že $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

- V tomto vysvetlení je kľúčové, že pôvodné tvrdenie musí platiť pre ľubovoľnú krivku. Prečo?

Zaujímavosťou Stokesovej vety je, že môže byť užitočná aj pre ľudí, ktorých fyzika nezaujíma. Napríklad ich však zaujímajú komplexné čísla (ktoré sú dvojrozmerné a tvoria plochu)[7].

4.4 Konzervatívne polia

Poďme konečne späť k fyzike. Existuje veľmi užitočný pojem – práca,

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}. \tag{46}$$

Práca sa meria v J(ouloch) a ľudovo hovorí, že aké náročné je pohyb pri danom silovom pôsobení vykonať. Pri istom type síl platí, že

$$W_0 = \oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0. \tag{47}$$

Teraz sme výnimočne zdôraznili, že ide o integrál po uzavretej slučke. Teda, ak sa pri výkone práce vrátim na začiatok, nevykonám žiadnu prácu – koľko

[7]Toto je pre nás v podstate nedôležitá poznámka, je však možnosť sa jej venovať v rámci doplnkového projektu.

J som dal, toľko som si vzal. Takýmto silám sa hovorí konzervatívne. Táto hodnota je objektívna, keďže nezáleží od konkrétneho výberu trasy, len od konečného bodu.

- Poznáte nejaký príklad konzervatívnej sily?
- Poznáte príklad nekonzervatívnej sily?

Matematická podmienka pre konzervatívne sily je

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{48}$$

- Prečo?

V čom sú konzervatívne sily významná? Že práca, ktorú pri nich vykonáme, nezáleží od dráhy, pozdĺž ktorej ju robíme. Nech už sa z bodu A do bodu B dostaneme hocijako, bude nás to stáť rovnako veľa práce. Má teda zmysel zaviesť stavovú veličinu – potenciálnu energiu – ktorá mi hovorí, koľko práce potrebujem vykonať, aby som sa na dané miesto dostal (voči nejakému referenčnému bodu, napríklad povrchu Zeme).

- Prečo nie je odporová sila vzduchu konzervatívna? Vymyslite konkrétny príklad.

Ak je sila konzervatívna, viem ju zapísať pomocou jedného vektorového poľa:

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi. \tag{49}$$

- Ako je možné, že vektorové pole (tri komponenty) viem zapísať pomocou skalárneho (jedna komponenta)?
- Ukážte, že takto zadefinovaná sila je konzervatívna.

Toto je veľmi užitočný nástroj, silové polia, ktorá spĺňajú požiadavku konzervatívnosti vieme opísať oveľa jednoduchším objektom, pomocou ktorého vieme napríklad hravo počítať prácu vykonanú pri istom pohybe.

- Ako?

Príklady

- Nakreslite vektorové polia:
  - $\mathbf{A} = (1, 2, 1)$,
  - $\mathbf{A} = (x, y, z)$,
  - $\mathbf{A} = (0, -z, y)$,
  - $\mathbf{A} = (z, -y, 0)$,
  - $\mathbf{A} = (x^2, -z, -1)$.
- Spočítajte rotácie a divergencie polí z predošlej úlohy.
- Vyberte si vektorové pole, ktoré má nulovú rotáciu. Overte, na jednom príklade, že integrál po slučke dá nulový výsledok.
- Nájdite $\mathbf{A}$ také, že rot $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$.
- Nájdite $\mathbf{A}$ také, že rot $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$. Je váš výber unikátny?
- Je silové pole $\mathbf{A} = (x, y, z)$ konzervatívne? Ak áno, spočítajte jeho potenciál. Svoju odpoveď overte.
- Spočítajte silu odpovedajúcu potenciálu $\Phi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- Nakreslite si vektorové pole $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ a okolo neho sférickú plochu s polomerom R. Spočítajte $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}$ cez túto plochu.
- Dokážte Gaussovu vetu (obrázkový dôkaz stačí).
- Dokážte, že platí rot $(\mathbf{A} + \lambda\, \mathbf{B}) =$ rot $\mathbf{A} + \lambda$ rot $\mathbf{B}$.
- To isté pre div.
- To isté pre grad.
- Ukáže, že rot grad $\Phi = 0$. Teda, že potenciálové pole je vždy konzervatívne.
- Spomínali sme ešte jeden dôležitý diferenciálny operátor, ktorý môžem pustiť aj na skalárne funkcie a aj na vektorové polia. Je definovaný ako $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$. Spočítajte $\Delta\phi$ a $\Delta\mathbf{A}$, kde $\phi = x^2 e^y$ a $\mathbf{A} = (\cos x, y^3, z)$.

- To isté čo v prvej úlohe, ale pre Δ.
- Spočítajte $\Delta\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- Dokážte Stokesovu vetu (obrázkový dôkaz stačí).

5 Iné formulácie mechaniky

Zatiaľ sme pracovali s jednou formuláciou mechaniky – Newtonovou – a možno ste si povedali, nie je to málo? Stav častíc je v nej opísaný pomocou polohy bodov $\mathbf{r}_i(t)$ (ktoré súvisia s rýchlosťou a zrýchlením). Pohybová rovnica je $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{a}_i$, čiže diferenciálna rovnica druhého stupňa, pri ktorej musíme zadať dve počiatočné podmienky, napríklad: $\mathbf{r}_i(t_0),\ \mathbf{v}_i(t_0)$.

- Aké iné dve podmienky sa dajú zadať?

Čiže pohyb častice bol zadaný silou, ktorá na ňu pôsobí; z matematického hľadiska sme riešili diferenciálnu rovnicu druhého rádu.

- Stručne zhrnúť riešenie lineárneho harmonického oscilátora v tomto kontexte.

Tento popis nie je vždy ideálny, dôvody sú rôznorodé. Prakticky napríklad preto, že na teleso pôsobia rôzne sily, ktoré sa navzájom čiastočne vyrušia. Pekným príkladom je kyvadlo. Ak zavesíme závažie na špagát, technicky vzaté ide o pohyb v troch rozmeroch. Reálne však kývanie prebieha len v dvojrozmernej ploche, za istých podmienok ...

- Akých?

... je pohyb dokonca jednorozmerný, teda prebieha na krivke.

- Prečo?

Aj pohyb v dvoch rozmeroch je jednoduchší, než by sa mohlo zdať. Pohyb sa síce deje v dvojrozmernej ploche, ale dá sa opísať len jednou súradnicou.

- Kvôli akému obmedzeniu?

Obmedzenie niekedy voláme aj väzba. V princípe o tom môžeme rozmýšľať ako o rovniciach s neznámymi. Ak máme jednu neznáme x a k nej zadanú žiadnu rovnicu, môže byť hodnota x hocijaká. Keď pridám rovnicu $x^2 - 2x + 1 = 0$, tak zrazu už hodnota x nemôže byť hocijaká. Ponaučenie: rovnice (obmedzenia, väzby) znižujú efektívny počet stupňov voľnosti. Stupeň voľnosti je všeobecné označenie pre *niečo*, čo sa správa dynamicky. Napríklad hmotný bod pohybujúci sa v dvojrozmernej ploche má dva stupne voľnosti, ak by som však povedal, že sa musí držať vo vzdialenosti R od počiatku, je jeho poloha presne opísaná jedným uhlom, teda jedným stupňom voľnosti.

- Akým uhlom? Čo vám to pripomína?

Stupne voľnosti môžu byť aj sofistikovanejšie, napríklad opisovať kolektívny pohyb mnohých bodov – napríklad rôzne formy vlnenia, pričom každý typ vlny (ktorá tam môže, ale nemusí, byť) bude predstavovať stupeň voľnosti, podobne, ako stupeň voľnosti predstavuje poloha voľného bodu voči rôznym súradnicovým osiam (voči ktorým sa môže, ale nemusí, pohybovať).

Takže, ak máme spomínané kyvadlo – závažie na natiahnutom špagáte, ktoré sa kýva v istej rovine, tak je jeho pohyb opísateľný pomocou jedného uhla.

- Koľko Newtonových pohybových rovníc používame na jeho opis a koľko síl v nich vystupuje?

Namiesto mnohých diferenciálnych rovníc s viacerými silami (v tomto prípade gravitačná sila a reaktívna sila špagátu) nám stačí len jedna premenná a pre ňu jedna dynamická rovnica. Toto je, v skratke, esencia a pôvab Lagrangovskej mechaniky.

5.1 Lagranžova mechanika

Ide o trochu iný opis mechaniky. Stav systémy je opísaný pomocou zovšeobecnených súradníc $\mathbf{q}_i$ ako $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}) = (x_i(q), y_i(q), z_i(q))$ (rýchlosti zadané obdobne, cez časové derivácie). Napríklad pohyb v dvoch rozmeroch môže zadávať cez (x, y) alebo (r, φ) alebo v niektorých prípadoch len cez φ. Dynamika je zakódovaná cez funkciu, takzvaný Langrangián (niekedy aj lagranžián), cez túto rovnicu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \tag{50}$$

pričom v prípade nerelativistických[8] častíc je Langrangián daný ako

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{51}$$

kde T je kinetická a U potenciálna energia systému.

- Vyskúšať pre kyvadlo a lineárny harmonický oscilátor.

[8] K relativistickej fyzike sa dostaneme neskôr.

- Overiť konzistentnosť s Newtonovými zákonmi.

Na čo je to dobré? Napríklad sa dá lepšie zovšeobecniť. V klasickej mechanike máte na výber buď používať silový Newtonovský opis alebo opis cez Lagrangeov účinok – na jeho zadanie potrebujeme vedieť opísať kinetickú a potenciálnu energiu systému. V mnohých modernejších teóriách, napríklad kvantovej teórii poľa, je pojem sily ťažko zadefinovateľný – no kinetická a potenciálna energia sa opisujú ľahko.

Prvým argumentom pre Lagranžovskú mechaniku bola jednoduchosť a praktickosť, druhým je vhľad, ktorý v niektorých situáciách poskytuje. K tomu sa dostaneme o chvíľu. Máme však možnosť premostiť k veľmi významnej oblasti matematiky, ktorá úzko súvisí s optimalizáciou. Niekedy sa stane, že pohyb je limitový, obmedzený istými rovnicami, napríklad $x^2+y^2 = R^2$ ak ide o pohyb po kružnici. Obmedzenia sa vždy dajú napísať v tvare $f(\mathbf{r}, t) = 0$, napríklad $f(x, y, t) = x^2 + y^2 - R^2$ pre spomínaný pohyb po kružnici. Ak chcem, aby pohyb dodržiaval tieto pravidlá, použijem takto upravené rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^{C} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} = 0, \tag{52}$$

kde λ_i sa volá Langrangeov multiplikátor a C je celkový počet obmedzení. (Iný uhol pohľadu je, že sa to stane súčasťou Lagrangiánu a λ môžem brať ako premennú.)

Poďme sa pokúsiť pochopiť, čo na čom je takáto formulácia mechaniky vlastne založená. Spravme si odbočku k matematike.

- Čo je to funkcionál?
- Ako ho definovať cez integrál?

Bežná funkcia je predpis, ktorý priradí číslu číslo. Už sme sa stretli s inými operáciami, napríklad derivácia je operátor, funkcii priradí funkciu.

- Viete vymyslieť iný príklad operátora?

Funkcionál je zobrazenie, ktoré funkcii priradí číslo. Netreba sa tváriť prekvapene, už sme na také narazili – napríklad určitý integrál robí presne toto. Iný príklad – mám funkcie, ktoré opisujú krivku v priestore a tejto krivke viem priradiť číslo, napríklad jej dĺžku. Takže dĺžka krivky (presnejšie integrálny predpis na jej výpočet) je vlastne z toho pohľadu funkcionál. V princípe, aj vyčíslenie funkciu v nejakom bode sa dá brať ako funkcionál.

- Dá sa aj takáto operácia, $f(x) \to f(x_0)$, zapísať ako integrál?

- Pre funkciu máme deriváciu aby sme vedeli ako sa mení, nulovosť derivácie značí minimum alebo maximum. Ako toto sformulovať pre funkcionál?

Ak máme funkcionál $S(q) = \int_a^b s(t, q, \dot{q})dt$ tak rovnica pre jeho extremalizáciu je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial s}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial s}{\partial q_j}. \tag{53}$$

Vyzerá to povedome? Lagrangova mechanika je úplne iná paradigma. Máme funkciu, ktorá opisuje celkovú trajektóriu, jej priradíme funkcionálom číslo a vyberá takú trajektóriu, ktorá daný funkcionál maximalizuje.

- Ako cez toto spočítať tvar zaveseného špagátu?

5.1.1 Symetrie a zákony zachovania

Teraz tá sľúbená odmena, hlboká pravda o svete, ktorú sme poznali, ale netušili, prečo vlastne platí.

- Aké zákony zachovania poznáme?

- Čo sú to symetrie?

Pod symetriou rozumieme nemennosť objektu pri nejakej transformácii, napríklad, ak ho otočíme. Rotácia je však jednou špecifickou transformáciou, inou je napríklad posunutie v priestore ...

- Aké teleso vyzerá rovnako pri posunutí v priestore?

... alebo v čase.

- Aké teleso vyzerá rovnako pri posunutí v čase?

- Vymyslite príklad diskrétnej a spojitej symetrie.

V princípe sa nemusíme rozprávať len o operáciách, ktoré robíme s telesami ale aj s rovnicami. Napríklad, gravitačné pole v okolí Zeme nie je invariantné voči posunutiam v priestore, lebo na Slovensku mieri iným smerom, ako v Austrálii. Ale je invariantné voči posunutiam v čase, lebo (až na drobné odchýlky) je dnes rovnaké ako včera. Hovoríme, že rovnice majú symetriu ak sa nezmenia pri istej transformácií.

Emma Noether dokázala fascinujúce tvrdenie – ak má systém rovníc symetriu, existujú v ňom zachovávajúce sa veličiny. Presnejšie takto:

Noetherovej teorém: Za každú diferencovateľnú symetriu generovanú lokálnym účinkom existuje zachovávajúci sa prúd.

Noetherovej teorém (ľudové znenie): Za každú symetriu máme zákon zachovania.

Poďme si to ukázať. Príklad: Čo ak správanie systému nezávisí od polohy? Potom musí platiť, že $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\dot{\mathbf{q}}, t)$ [9]. Tým pádom máme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{54}$$

Ľavá strana tvrdí, že existuje veličina, ktorá sa v čase nemení.

- O akú veličinu ide?
- Ako to funguje pre dve častice a potenciál v tvare $V(x_1 - x_2)$?

Čo sme sa práve dozvedeli? Hybnosť sa zachováva ako dôsledok nezávislosti fyzikálnych zákonov od polohy (vo vesmíre)!

- Skúsme ešte jeden zákon, čo dostaneme za nemennosť rovníc v čase? $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

Platí bijektívny vzťah medzi spojitými symetriami a zákonmi zachovania.

- Čo je to bijekcia?
- Existuje energia?

[9] V tomto príklade sme vynechali celý vektor, v princípe to platí aj pre jednu zložku. Prečo? (Načakaná otázka v poznámke pod čiarou!)

5.2 Hamiltonova mechanika

V Hamiltonovej formulácii je logika ešte trochu iná. Stav systému je zadaný pomocou súradníc vo fázovom priestore $\mathbf{r} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a dynamika systému je zadaná cez tzv. Hamiltonián, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, je funkciou, ktorá zobrazuje body fázové priestoru do reálnych čísiel. Hamiltonián bežne predstavuje energiu systému.

- Koľko rozmerov má fázový priestor a čo to vlastne je?

Pohybové rovnice sú teraz dve:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \tag{55}$$

Bežný spôsob ako nájsť Hamiltonián je využiť transformáciu:

$$H = \sum_i \dot{q}^i p_i - L, \tag{56}$$

kde $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ sa volá zovšeobecnená hybnosť. Tomuto sa hovorí Legendrova transformácia, ide o bežný prechod medzi dvoma združenými opismi jedného systému.

- Čo je to fázový portrét systému?

Na čo je to dobré? Podobne ako pri Langranžiáne sa dá tento postup dobre zovšeobecniť, napríklad pri definovaní kvantovej mechaniky. Hamiltonovská mechanika sa často objavuje pri robení numerických simulácií.

- Prečo?

Matematicky sú zrazu dokázateľné veľmi netriviálne tvrdenia, napríklad, že objem vo fázovom priestore sa počas pohybu po trajektóriách zachováva, volá sa to Liouvillov teorém.

- Čo sa tým myslí?

Príklady

- Opíšte pohyb kyvadla na pohyblivej plošinke (stačí nájsť pohybovú rovnicu).
- Opíšte pohyb lineárneho harmonického oscilátora cez newtonovskú, lagranžovskú aj hamiltonovskú mechaniku. Nájdite zákony zachovania a pohybové rovnice.
- Zhotovte fázový portrét fyzikálneho kyvadla.
- Napíšte rovnice pre tri hmotné body spojené dvomi pružinami.

Dvojné kyvadlo
Na kyvadlo dĺžky l_1 pripevníme kyvadlo dĺžky l_2, na neho ide závažie m.

- Navrhnite rozumné súradnice pre opis takéhoto systému.
- Napíšte, ako vyzerá kinetická energia (návod: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$, kde x, y vyjadrite cez vaše súradnice a správne zderivujte).
- Napíšte potenciálnu energiu.
- Napíšte Lagrangián a pohybové rovnice (pre obe premenné).
- Odvoďte združenú hybnosť, Hamiltonián a Hamiltonove rovnice (vyšli rovnako?)

Kyvadlo na plošinke
Kyvadlo je zavesené na platforme, ktorá sa voľne pohybuje v horizontálnom smere. Zopakujte všetko z predošlej úlohy plus nájdite zákony zachovania.

Projekty

- Spracovať tému symetrií a zákonov zachovania.
- Spočítať cez funkcionál tvar lana zaveseného medzi dvomi bodmi.

6 Oscilátor

Lineárny harmonický oscilátor je asi najvýznamnejší fyzikálny systém. Okrem toho, že sa nachádza, občas trochu kamuflovane, všelikde (vysvetlíme si prečo), tak sa na ňom dá naučiť aj veľa zaujímavej matematiky. Budete teda chvíľu preskakovať medzi fyzikou oscilátora a rôznymi oblasťami matematiky.

6.1 Lineárny harmonický oscilátor, 1. časť

Oscilácia je jedna zo základných foriem pohybu. Bežne študujeme lineárny harmonický oscilátor (LHO), už sme ho párkrát spomínali bez riadneho uvedenia.

- Čo je na oscilátore harmonické a čo lineárne?

Jeho diferenciálna rovnica vyzerá takto:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \tag{57}$$

kde $\omega_0^2 = k/m$ je prirodzená frekvencia oscilátora. Intuitívny opis je takýto: objekt je ťahaný opačným smerom, ako je vychýlený – teda smerom k rovnovážnemu stavu – pričom sila je úmerná tejto výchylke. Čím viac sme vychýlení, tým viac to ťahá.

- Odvoďte rovnicu pre LHO v lagranžovej a hamiltonovej mechanike.

Riešením tejto rovnice je $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$.

- Aké sú ďalšie možné riešenia a prečo nie sú vhodné?

To znamená, že keď vychýlime objekt jedným smerom od rovnováhy, sila ho bude ťahať späť – no objekt sa v rovnovážnom stave nezastaví a preklopí sa opačným smerom.

- Prečo to nemôže byť inak?
- Čo by to zmenilo?
- Ako určujeme A, ϕ?
- Existujú aj iná formy zápisu riešenia?

Čo sa stane, ak sa pokúsime rozhýbať oscilátor s inou frekvenciou, $F = F_0 \cos(\omega_F t)$. Zoberme $\phi = 0$ pre jednoduchosť. Rovnica vyzerá ako

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \sin \omega_F t. \tag{58}$$

Riešenie budeme hľadať v tvare $x = A \sin \omega_F t$.

- Prečo?

Dôležitá je pre nás teraz hodnota amplitúdy $A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_F^2}$.

- Ako vyzerá jej graf v závislosti od ω_F?

Jav pri ktorom $\omega_0 \sim \omega_F$ sa volá rezonancia.

- Prečo funguje?
- Má rezonancia svoje limity?

Čo ak by sme mali vynucovaciu silu $F = F_0^1 \sin(\omega_1 t) + F_0^2 \sin(\omega_2 t)$? Teda namiesto jednoduchej vynucújucej sily máme jednu trochu zložitejšiu, ktorá však je súčtom dvoch jednoduchých. Ako získať riešenie? Čo tak skúsiť jednotlivé riešenie sčítať dokopy?

- Prečo je teda LHO *lineárny* oscilátor?
- Ako naplniť počiatočné podmienky pri zapnutej sile?

Čo ak by sme dostali zadanú silu, ktorá síce je periodická, ale na prvý či druhý pohľad nepripomína súčet sínusov? Je čas na prvé matematické okienko.

6.2 Matematické okienko 1: Fourierov rozvoj

Už sme sa stretli s jedným veľmi špecifickým rozvojom a jedným veľmi špecifickým rozkladom.

Pri Taylorovom rozvoji sme si ukázali, že funkcie vieme rozkladať do radov, napríklad $\sin x = x - x^3/3! + ...$ Má to veľkú výhodu, špeciálne ak skúmame len malé okolie istého bodu (napríklad $x = 0$ v tomto prípade), keďže môžeme veľa členov zanedbať, napríklad všetky okrem prvého – podľa požadovanej presnosti. To je prvé dôležité ponaučenie.

Dôležitou vlastnosťou vektorov je, že sa dajú rozkladať do zložiek (pomocou bázy), napríklad $(1,2)^T = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$, kde $\mathbf{e}$ sú bázové vektory s dĺžkou 1 ukazujúce v smere osi x a y. Dôležitou vlastnosťou bázových vektorov je, že $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$ a $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$. Prečo je to užitočné? V princípe môžeme používať zložitejšiu bázu, napríklad $e_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ a $e_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

- Overte, že spĺňa spomínané vlastnosti a rozložte do tejto bázy spomínaný vektor.

Ako vyextrahovať zložky vektora voči danej báze? Ak mám vektor $\mathbf{v} = (a,b) = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$, tak ľahko. Ak ma napríklad zaujíma prvý koeficien, α_1, tak stačí vektor skalárne prenásobiť s $\mathbf{e}_1$.

- Ukážte, že je to naozaj tak.

Krátke zhrnutie: vektory rozkladáme do bázy, ktorej prvky sú vybrané tak, aby spĺňali pekné vlastnosti a vďaka tomu viem hravo – pomocou operácie skalárneho súčinu – extrahovať jednotlivé koeficienty rozvoja.

Toto je zaujímavý bod, doteraz ste poznali skalárny súčin jednoducho cez jeho geometrickú interpretáciu. Teraz sa však predstavuje v trochu novej úlohe – umožňuje definíciu štruktúry. Bežný postup v matematike je, že objavíme niečo užitočné a pokúsime sa to zovšeobecniť.

Predstavte si, že máme vektorový priestor V. Vektorový priestor je množina prvkov, ktoré sa dajú spolu sčítavať a násobiť skalármi (teda číslami).

Vektorový priestor môžem vybaviť *vnútorným súčinom*, ktorý funguje tak, že do neho vložím dva prvky vektorového priestoru a on mi vyhodí číslo, pričom platí (pre jednoduchosť budeme uvažovať len reálne zložky, v princípe sa dá všetko prerozprávať aj komplexne), že

1. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \in \mathbf{R}$,
2. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle$,
3. $\langle \mathbf{v}_0 + a\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + a \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 \rangle$,
4. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \geq 0$.

- Overte, že bežný skalárny súčin spĺňa tieto vlastnosti. Skúste ich slovne vysvetliť.

Ako sme sa rozprávali, toto násobenie vdýchne vektorovému priestoru život a zavádza mnoho užitočných vlastností. Možností, ako zadefinovať skalárny súčin, je veľa a môžu odpovedať rôznym fyzikálnym kontextom.

- Ako je definovaná dĺžka vektora?

Takže, späť k sínusom a kosínusom. Predstavme si ohraničený interval $\langle 0, L\rangle$ a uvažujme sínusy, ktoré na okrajoch tohoto intervalu majú nulové hodnoty; majú tvar

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{59}$$

Takéto funkcie sa dajú sčítavať a násobiť číslami a stále budú spĺňať požiadavku, aby boli na okrajoch intervalu nulové.

- Je to očividné?

Takže nami zadefinované funkcie f_n sa správajú ako báza vektorového priestoru funkcií s nulovými okrajovými podmienkami, $\mathbf{e}_n$.

- Aký je tam jeden veľký rozdiel?

Ako by sme zadefinovali niečo, čo bude zohrávať úlohu vnútorného súčinu? Malo by ísť o operáciu, ktorá bude spĺňať požiadavky, ktoré sme videli pred chvíľou.

- Aké je operácia, ktorá zoberie dve rôzne funkcie a priradí im číslo?

Čo tak integrál?

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{2dx}{L}. \tag{60}$$

- Ukáže, že toto spĺňa vlastnosti ako sme mali pre skalárny súčin.

- Už asi tušíte, prečo sa pred sínusom objavila divná konštanta. Všimnite si, že sme ju v princípe mohli upratať do definície súčinu. Vidno to?

Tak a hotovo, už by vlastne všetko mali byť jasné. Volá sa to Fourierov rozvoj: slušné [10] funkcie spĺňajúce požiadavku $f(0) = f(L) = 0$ sa dajú rozkladať do bázy sínusov

$$f(x) = \sum_{n=1} a_n f_n(x), \tag{61}$$

pričom vnútorný (skalárny) súčin máme definovaný pomocou integrálu a všetko ostatné funguje ako pri rozkladaní vektorov do bázy, akurát s tým rozdielom, že tu má báza nekonečne veľa prvkov.

- Ako a prečo by sa toto dalo zopakovať s kosínusmi?

6.3 Lineárny harmonický oscilátor, 2. časť

Tak a sme späť pri fyzike, pripomeňme si, čo sa dialo. Položili sme si otázku, čo ak na oscilátor pôsobí periodická sila, ktorá na prvý pohľad nepripomína sínusy či kosínusy? Už je asi odpoveď jasná. Aj keď niečo nepripomína sínusy, tak to ešte neznamená, že sa do sínusov rozložiť nedá. A keď viem rozložiť vynucovaciu silu do sínusov a zároveň viem, že pre každý člen na pravej strane môžeme nájsť separátne riešenie a potom ich sčítame dokopy.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) = \sum_n a_n \sin(n\omega t) \to x(t) = x_H(t) + \sum_n x_n(t), \tag{62}$$

kde $x_H(t)$ je riešenie homogénnej rovnice (s nulou na pravej strane) a $F(t)$ je pravidelne nulová funkcia, ktoré, ako sme si ukázali, vieme rozložiť do sínusov. A teda $x_n(t)$ sú riešenie odpovedajúce týmto sínusovým vynucovacím silám.

- Čo sa tým myslí? Ako by sa zmenilo riešenie pre iné periodické $F(t)$?

V tejto konštrukcii boli užitočné dve skutočnosti. Po prvé, že riešením LHO rovníc sú goniometrické funkcie a po druhé, že periodické funkcie sa dajú rozkladať do goniometirckých funkcií.

- Je to náhoda? Čo ak by sila nebola periodická?

[10]Ignorujeme teraz rôzne šialene nespojité funkcie a podobne.

Nebudeme týmto smerom pokračovať, demonštrovali sme užitočnosť a zmysel Fourierovho rozvoja. Situáciu si teraz skomplikujeme inak, do rovníc prihodíme člen za tlmenie $F_t = -\gamma m\dot{x}$. Doteraz sa nám v rovniciach objavovali nulté a druhé derivácie, čo je fajn, lebo keď zoberieme (ko)sínus a dvakrát ho zderivujeme, dostaneme znovu (ko)sínus a pár ozdôb, v rovniciach sa všetko pekne vykráti. Ak sa do rovníc dostane len jedna derivácia, začnú sa nám miešať sínusy a kosínusy.

- Ako by sa dalo postupovať?

Rovnice pre vynucovaný LHO s tlmením vyzerá takto:

$$\ddot{x} + \gamma m\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m)\sin\omega_F t. \tag{63}$$

V princípe by sa dalo postupovať asi tak, ako myslíte, ale je to krkolomné. Našťastie nám dáva matematika šikovný nástroj, komplexné čísla.

Matematické okienko 2: Komplexné čísla

Matematici (dávno) narazili na problém. Vedeli riešiť všelijaké zložité polynómy, nie však všetky.

- Ako? A aké sa dajú riešiť rozumne? A aké vôbec?

Jednoduchý príklad: $x^2 = -1$. A tak zadefinovali imaginárne čísla, $\sqrt{-1} = \pm i$.

- Je tento názov na mieste? Sú reálne čísla reálne?

Imaginárne čísla sa dajú spojiť s reálnymi a vytvoria komplexné čísla v tvare $z = a + i\, b$. Komplexné čísla sú čísla a tak sa s nimi dajú robiť bežné číselné operácie, niektoré operácie sú však oproti reálnym číslam nové:

1. sčítavanie,
2. násobenie,
3. delenie,
4. komplexné združenie,

5. určenie amplitúdy.

- Ako sú zadefinované?
- Ktoré sú nové? A sú nové naozaj?

Dôležité tvrdenie spojené s komplexnými číslami je základná veta algebry: „Každý polynóm stupňa aspoň prvého s komplexnými koeficientami má v telese komplexných čísel aspoň jeden koreň.“

- Ako by ste to povedali (síce menej presnejšie ale zato) jednoduchšie?

Napríklad ak mám polynóm $3x^2+6x+10$, tak má korene $x = \frac{1}{3}\left(-3 \pm i\sqrt{21}\right)$.

- Aký sa dá v tomto kontexte interpretovať komplexné združenie?

Komplexné čísla majú dve zložky a tak sa prirodzene dajú zapísať v dvojrozmernej rovine.

- Vyskúšajte si takto zakresliť základné operácie.
- Nakreslite bod $2+i$. Prenásobte bod číslami: $2, i, 2i, 2+i$, výsledok zakreslite a prediskutujte.

Z komplexných funkcií viem robiť funkcie $f(x+i\ y) = u(x,y) + iv(x,y)$, zadefinované sú bežne pomocou Taylorovho rozvoja.

- Ako zadefinovať deriváciu?

(Tomuto odstavcu netreba rozumieť podrobne, berte to len ako zaujímavú poznámku bokom.) Funkcie, pre ktoré existuje v každom bode $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ voláme holomorfné. Pre takéto funkcie platí veľmi silné tvrdenie, Cauchyho integrála veta: $\int\limits_\gamma f(z)dz = 0$. Ak funkcia nie je holomorfná len v množine bodov a_k, tak na pravej strane rovnice sa objaví $2\pi i \sum\limits_k \mathrm{Res}\ (a_k)$. Toto sa volá reziduová veta, Res (a_k) je jednoducho spočítateľná vec. Vo výsledku mi táto konštrukcia umožňuje spočítať veľmi ťažké integrály pomerne jednoduchým spôsobom. Hodnota (reálneho) integrálu sa prevedie na hľadanie rezíduí v komplexnej ploche.

Najdôležitejšia funkcia komplexných čísiel je (aspoň pre fyzikov) exponenciálna.

- Pripomeňme si, čo je e^{ix}? Návod: Taylorov rozvoj.
- Aká je amplitúda tohto čísla? Prečo sa mu hovorí komplexná jednotka?

Každé komplexné číslo viem teda zapísať v tvare $z = e^{a+ib} = re^{i\phi}$, niekedy hovoríme aj o amplitúde/veľkosti a fáze.

- Zistite hodnotu r, ϕ. Ako funguje násobenie pri takomto zápise?
- Na pobavenie, ak je čas, prediskutujte Riemannovu hypotézu.

Tak a teraz toto všetko môžeme zúročiť pri riešení tlmeného LHO.

6.4 Lineárny harmonický oscilátor, 3. časť

Už vieme, že je súvis medzi exponenciálnou funkciou z komplexného čísla a sínusmi a kosínusmi: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Oproti ním však má jedno výhodu (keďže ich mieša), ak derivujem exponenciálu (raz či dvakrát), dostanem to isté.

Ak by sme dosadili do rovnice (63) ako možné riešenie Ae^{iBt}, tak by to na ľavej strane vyzeralo celkom dobre, z každého člena by sa dala vyňať exponenciála.

- Je to vidno?

Problém je na pravej strane, tam máme sínus a nie exponentu. Ak by sme tam mali tiež exponentu, mohli by sme ju vykrátiť s tou na ľavej strane a zostane nám jedna jednoduchá rovnica pre A. Zmeniť však pravú stranu rovnice, to je podvod, nie? Riešime niečo iné, ako sme mali zadané! Nebojte sa, dá sa to spraviť korektne.

Predstavte si dve rovnice:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 0, \\ u_2(x) &= 0, \end{aligned} \tag{64}$$

pokojne napríklad $u_1 = x^2 + 2x - 1$ a $u_2 = 3 \sin x$. Máme dve rovnice pre (jednorozmerné) premenné x a asi nie je takým prekvapením, že ich dokážeme zapísať pomocou jednej rovnice pre (dvojrozmerné) komplexnú funkciu $z = u_1(x) + iu_2(x)$, s ktorou stačí napísať $z = 0$ a máme vybavené.

- Koľko núl je v komplexnej nule?

No a už možno tušíte, v čom spočíva vtip. Niekedy sa dve rovnice naraz riešia ľahšie, ako obe osve. Čo ak by sme si k rovnici (63) domysleli ďalšiu a tú pôvodnú vynásobili s i?

- Môžem rovnicu len tak násobiť s i?

Dostaneme toto:

$$\begin{aligned} i\left(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x\right) &= i\,(F_0/m)\sin\omega_F t, \\ \ddot{x_f}+\gamma\dot{x_f}+\omega_0^2 x_f &= (F_0/m)\cos\omega_F t. \end{aligned} \tag{65}$$

Druhá rovnica je pre inú premennú, x_f, kde f zdôrazňuje, že ide o fiktívne riešenie, ktorá nás nezaujíma a vymysleli sme ho.

- Aký je rozdiel medzi fiktívnym a imaginárnym? Prečo to nemáme naopak, teda, že fiktívna časť by bola tá imaginárna?

Teraz si zadefinujme $z = x_f + ix$ a dostaneme jednu rovnicu

$$\ddot{z}+\gamma\dot{z}+\omega_0^2 z = (F_0/m)\,e^{i\omega_F t}. \tag{66}$$

Riešenie tejto rovnice budeme hľadať v tvare $z = Ae^{i\omega_F t}$ a dostaneme

$$A\left(-\omega_F^2 + i\omega_F\gamma + \omega_0^2\right) = F_0/m. \tag{67}$$

Z toho už ľahko získame vyjadrenie pre A. Dokopy teda máme (komplexné) riešenie

$$z = \frac{F_0/m}{-\omega_F^2 + i\omega_F\gamma + \omega_0^2}, \tag{68}$$

pričom si treba spomenúť, že nás zaujíma len jeho imaginárna časť (lebo tá nie je fiktívna) [11], $x = \mathrm{Im}\ z$. Toto cvičenie s imaginárnymi číslami si necháme na cvičenia, dôležitá je však amplitúda oscilácie:

$$A = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + \gamma^2\omega^2}, \tag{69}$$

ako vidíme, po pridaní tlmenia už amplitúda nemôže byť nekonečná.

[11] Toto je dobrá lekcia k precíteniu skutočnosti, že názov *imaginárne čísla* je nešťastný.

- Intuitívne je to prečo?

Stále však platí, že rezonancia nastáva pre $\omega_F \sim \omega_0$. Aplikácia je taká, že výrazné kmitanie sa dá dosiahnuť aj bez výrazne veľkej sily. To je niečo, čo vidíme všade okolo seba.

- Vymenujte milión príkladov vecí, čo kmitajú.
- Prečo je tomu tak? Čo ich spája? (Nápoveda: Prečo kmitá kyvadlo?)

Poďme nájsť zdôvodnenie univerzálnosti kmitania. Sila pre LHO je $F = -kx$, jeho potenciálna energia je

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{70}$$

- Sedí to?

Veci majú tendenciu dosadnúť do energetického minima.

- Prečo? Nemala by sa energia zachovávať?

Ako vyzerá potenciál v okolí minima? Takto

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots . \tag{71}$$

Prvý člen je nepodstatný, ide o konštantný príspevok k energii. Keď si zadefinujeme súradnice tak, aby $x_0 = 0$, tak je zrazu jasná jedna vec.

- Aká? (Nápoveda: Aký člen chýba v rozvoji?)

Každý systém, ktorý má tendenciu dosadnúť do energetického minima, sa správa ako oscilátor! Jednoduché, elegantné a fascinujúce zistenie.

- Kedy sa kyvadlo správa ako oscilátor?

No dobre, ale hmota predsa nie je tvorená z jednej veci, ktorá by oscilovala, ale z mnohých. Môžeme si predstaviť oscilátory, ktoré sú medzi spojené – hovoríme o zviazaných oscilátoroch.

Predstavme si napríklad jednoduchý systém klinec-pružinka-závažie-pružinka-závažie-pružinka-klinec (ten prvý a posledný klinec sú jeden a ten istý). Všetky pružinky majú tuhosť k, závažia majú hmotnosť m a polohy x_1, x_2, potenciálna energia je:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2. \tag{72}$$

- Každý člen zodpovedá natiahnutiu jednej z pružiniek, ktorý je ku ktorej?

Keď si to rozbijeme na drobné, dostaneme

$$U(x_1, x_2) = kx_1^2 - kx_1x_2 + kx_2^2. \tag{73}$$

Tomuto hovoríme zviazané LHO. Tú zviazanosť je cítiť – ak je napríklad veľká hodnota x_1, tak to cíti aj druhý oscilátor a to kvôli druhému členu, $-kx_1x_2$. Ako získať pohybové rovnice? Dopíšeme kinetickú energiu

$$T(x_1, x_2) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2, \tag{74}$$

napíšem lagranžián a z lagranžovej rovnice dostanem dve diferenciálne rovnice pre x_1, x_2. Tie budú, neprekvapivo, previazané.

- Čo to znamená pri diferenciálnych rovniciach?

- Ako by sme tieto diferenciálne rovnice získali v newtonovskej mechanike?

Bude takéto niečo oscilovať? To na prvý pohľad možno nie je jasné, dobre máme zatiaľ ošetrenú situáciu pre jeden LHO.

- Ako vyzerá lagranžián a pohybové rovnice pre dva neviazané a viazané LHO?

Poďme sa pozrieť na matematiku, ktorá nám umožní tento problém rozpliesť.

6.5 Matematické okienko 3: Vlastné hodnoty a vlastné funkcie

Vektory sú užitočné a dá sa s nimi všeličo robiť. Mali sme dva spôsoby, ako ich spolu násobiť a tak trochu bez poznámky prešlo, že ich vieme aj násobiť obyčajným číslom a sčítavať. Ak máte dva vektory, $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, viete z nich vyrobiť nový vektor $\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$. Hovoríme, že vektory majú lineárnu štruktúru a tvoria vektorový priestor.

- Viete vymyslieť príklad niečoho, čo sa správa podobne a príklad niečoho, čo takúto štruktúru nemá?

Takéto lineárne ...

- Pripomeňme si, prečo sa volá lineárne?

... skladanie je významnou vlastnosťou vektorov. S vektormi sa dajú robiť rôzne operácie, nikto nám nebráni zadefinovať operáciu: $(x, y) \to (x^2, \log |y|)$, ale niečo na nej nesedí. Čo? Nerešpektuje lineárnu štruktúru vektorov.

- Ako by ste to dokázali?

Od štruktúry rešpektujúcej operácie by sme očakávali, že bude spĺňať

$$A\left(\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2\right) = A\mathbf{v}_1 + \lambda A\mathbf{v}_2. \tag{75}$$

Takýto postup je v matematike (aj fyzike) bežný. Objavíme nejaký objekt s užitočnými vlastnosťami a položíme si otázku, že čo všetko sa s ním dá robiť tak, aby sme tú jeho užitočnú vlastnosť nepokazili. Takúto vlastnosť majú pri vektoroch matice, respektíve maticové násobenie.

- Ukážte na jednoduchej matici, že maticové násobenie rešpektuje lineárnu štruktúru vektorov.

Maticové násobenie je priamočiare, ale chvíľku trvá, špeciálne pri väčších maticiach. Sem tam sa stane, že je jednoduché, napríklad, keď násobím jednotkovou maticou (matica, ktorá má jednotky na diagonále a inde nuly). Môže byť maticové násobenie vektorov jednoduché aj pre zložitejšie matice? Áno, ak im vyberieme vektory na mieru. Inými slovami, chceli by sme toto:

$$A\mathbf{v}_\lambda = \lambda \mathbf{v}_\lambda. \tag{76}$$

Slovne povedaná, maticové násobenie je na danom vektore len prenásobenie číslom. V takto prípade sa $\mathbf{v}_\lambda$ volá vlastný vektor a λ je jemu odpovedajúca vlastné hodnota. V dvojrozmernom prípade sa vlastné hodnoty a vektory hľadajú ľahko, pri vyššom počte rozmerov je postup jasne daný, aj keď rovnice môžu byť náročnejšie. Z predošlú rovnicu vieme upraviť na polynomiálnu:

$$\left(A - \lambda \mathbf{1}\right) \mathbf{v}_\lambda = 0 \to \det\ \left(A - \lambda \mathbf{1}\right) = 0 \tag{77}$$

Tomuto polynómu (v premennej λ) sa hovorí aj charakteristický polynomiál.

- Akého je rádu?

- Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory oboch matíc A z úvodu. Koľko ich je?

- Fungovalo by to aj pre viacrozmerné vektory?

Takže máme zaujímavé zistenie. Pre matice vieme nájsť vektory, ktoré majú vlastnosť, že sa maticou násobia jednoducho – sú jej šité na mieru. Aký je rozmer štvorcovej matice, toľko vektorov a vlastných hodnôt nájdeme.

- Niekedy môže dochádzať k degenerácií, teda viacero identických vlastných hodnôt. Vymyslíte príklad? Prečo sa to deje?

Zatiaľ sme si zvykli, že vektory rozkladáme do bázy ...

- Čo to bola tá báza?

... tvorenej z jednotkových vektorov mieriacich v smere $x, y, ...$ (podľa počtu rozmerov), napríklad

$$(x, y)^T = x\,(1, 0)^T + y\,(0, 1)^T\,. \tag{78}$$

V princípe by sa dalo aj inak, napríklad

$$(x, y)^T = x\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1)^T + y\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1, 1)^T\,. \tag{79}$$

- Na čo sú tam tie $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

Prečo by sme si takto komplikovali život? Lebo sme sa práve dozvedeli, že niektoré vektory sa maticou násobia ľahšie, než iné. A teda ak máme napríklad podozrenie, že budeme veľa pracovať s nejakou maticou A, má zmysel rozkladať vektory v báze jej vlastných vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Potom máme násobenie jednoduché:

$$A\mathbf{v} = A\,(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v} + 2) = \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2. \tag{80}$$

Predstavte si, že máme maticu s vlastnými hodnotami $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| ...$. Ako by ste rýchlo našli (približnú ale rozumne presnú) hodnotu $A^{1000}\mathbf{v}$? Toto je jedna z ukážok, na čo je to dobré. Matice sa teda dajú rozkladať na tvar

$$A = Q\Lambda Q^{-1}, \tag{81}$$

kde Λ je diagonálna matica s vlastnými vektormi na diagonále a Q je matica, ktorej stĺpce sú (normované) vlastné vektory matice A. Matica Q má na starosti prechod do inej bázy.

- Prečo má Q takýto tvar?
- Overiť na našom príklade.

Kým sa vrátime k oscilátorom, ešte jedna poznámka. Niečo podobné ako vlastné vektory a vlastné hodnoty sa dá hľadať aj pre operátory na funkciách. Už sme sa stretli s niekoľkými operátormi, ktoré zobrazujú funkcie na funkcie (matice zobrazujú vektory na vektory). Jednoduchý príklad je derivácia ∂_x. Ak máme operátor D, ktorý pôsobí na funkcie, $D\ f = \tilde{f}$, tak sa môžeme pýtať, či existujú vlastné funkcie a vlastné hodnoty definované ako

$$D\ f = \lambda f \tag{82}$$

Riešenie môže niekedy podliehať aj okrajovým podmienkam. Keďže sú fyzikálne zákony vyjadrené cez diferenciálne rovnice, hľadanie vlastných funkcií príslušných diferenciálnych operátorov je pomerne bežná a užitočná disciplína.

- Ako vyzerajú vlastné funkcie operátorov ∂_x a ∂_{tt}?

6.6 Riešenie zviazaných oscilátorov a (an)harmonický oscilátor, 4. časť

Takže, poďme späť k LHO. Prepíšme si potenciálnu energiu pomocou matice ako

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2k & -k/2 \\ -k/2 & 2k \end{pmatrix} (x_1, x_2)^T. \tag{83}$$

Pomocou metódy, ktorú sme si pred chvíľou predstavili, vieme tento potenciál upraviť na tvar:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5k/2 & 0 \\ 0 & 3k/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} (x_1, x_2)^T. \tag{84}$$

Viem, čo si hovoríte, tak to teda ďakujem pekne! Nebojte sa, hneď sa to uprace. Zadefinujme si nové súradnice

$$(x'_1, x'_2)^T = \begin{pmatrix} -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} (x_1, x_2)^T. \tag{85}$$

Po dosadení dostaneme

$$U(x'_1, x'_2) = \frac{1}{2}\,(x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} 5k/2 & 0 \\ 0 & 3k/2 \end{pmatrix} (x'_1, x'_2)^T. \tag{86}$$

- Ako sa zmení člen s kinetickou energiou?

Stalo sa čaro, to je predsa potenciálna energia dvoch nezviazaných LHO! Ešte raz: mali sme dva zviazané oscilátory, pomiešali sme ich súradnice dokopy a tento mix sa už správa ako dva nezviazané oscilátory. Týmto mixom sa hovorí módy. Pozrime sa na ne:

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x_1 + x_2\right) \tag{87}$$

$$x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + x_2\right). \tag{88}$$

- Ako vyzerajú pohyby pri ktorých $x_1' = 0$ a $x_2' \neq 0$ a naopak?

Dva módy odpovedajú dvom rozdielnym situáciám, obe závažia sa hýbu presne spolu alebo presne naopak. Všeobecná situácia je kombináciou týchto dvoch. Frekvenciám módov sa hovorí vlastné frekvencie.

Ako by to dopadlo pre systém tisíc zviazaných oscilátorov? Máme matematicky zaručené, že existuje prechod do súradníc, kde sa budú správať ako tisíc nezviazaných oscilátorov, pričom rôzne módy budú zodpovedať rôznym kolektívnym pohybom; stále však pôjde o vlnenia, máme v čase periodické riešenia.

Takže si zhrňme posledné tri ponaučenie, všetky sú veľmi dôležité. Po prvé, keď máme systém, ktorý sa skladá pokojne aj mnohých častíc, tak tie majú tendenciu dosadnúť do energetického minima, okolo ktorého oscilujú. V princípe na seba stále navzájom pôsobia, preto sa dokopy správajú ako systém zviazaných oscilátorov, o ktorom však vieme, že jeho kolektívne módy sa znovu správajú ako neviazané oscilátory. No a keď máme oscilátor, pomerne veľká amplitúda sa dá vyvolať excitáciou s vhodnou periódou, keď je perióda vynucovacej sily blízka prirodzenej frekvencii, nastáva rezonancia. Kombinácia tvrdení v tom odstavci vysvetľuje, prečo sa toľko vecí v našom svete vlní a vibruje.

Už sme si s LHO užili veľa, no poďme si vychutnať ešte jedno spestrenie. Čo ak máme oscilátor, ktorý nie je harmonický? Predstavte si potenciálnu energiu v tvare

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{g}{4}x^4. \tag{89}$$

- Akú pohybovú rovnicu dostaneme?

Ak je hodnota g veľká ...

- Veľká v porovnaní s čím?

... tak máme smolu; čo to sa dá v princípe spočítať analyticky, bežne sme však odkázaný na počítač. Na pekné riešenie alà sínus môžeme zabudnúť.

- Skúste to.

Predpokladajme, že je porucha[12] veľmi malá. Pozrime sa na tri rovnice

$$y^3 = 1, \tag{90}$$
$$y^3 + 0.00001y = 1, \tag{91}$$
$$y^3 + 3y = 1. \tag{92}$$

Prvú z nich viete vyriešiť presne, druhú približne, s treťou by ste sa dosť potrápili. Poďme sa pozrieť na riešenie druhej, máte na to päť sekúnd a stačí presnosť plus mínus jedno percento. Aký je výsledok? Približne 1. Viac alebo menej ako 1? Asi trochu menej. Ako by ste zistili o koľko menej? Navrhnime riešenie v tvare $y = 1 + \epsilon$ a dosadíme.

Dostaneme tak rovnicu $0.00001+3.00001\epsilon+3\epsilon^2+\epsilon^3 = 0$. Tá vyzerá zložito, ale keď si pripomenieme, že nás zaujíma len malá oprava, môžeme prižmúriť oko a zobrať približnú rovnicu $0.00001 + 3.00001\epsilon = 0$, ktorá má riešenie $\epsilon = -0.00001/3.00001 \approx -3.3 \times 10^{-6}$. Skutočný výsledok je 0.999997, takže náš hrubý odhad bol veľmi presný!

- Čo by sa stalo, ak by sme tento postup skúsili na tretiu rovnicu?

Takže si zrekapitulujme, ako sme postupovali. Dostali sme rovnicu, ktorá bola takmer pekná. Krok číslo jedna, nahradiť ju jednoduchou a peknou rovnicou a získať riešenie. Potom sme do rovníc vrátili poruchu a predpokladali, že pekné riešenie sa zmení len trochu – a vyriešili sme, znovu približne, riešenie pre túto opravu. Nič nám nebráni v takomto cykle pokračovať, keďže sme zanedbaním členov v rovnici pre ε stratili istú presnosť, tak môžeme predpokladať, že existuje ďalšie – jemnejšie – spresnenie a náš výsledok doplniť o ďalšiu opravu $1-0.00001/3.00001+\varepsilon'$ a riešiť rovnicu pre ňu. Tomuto sa hovorí poruchový počet. Každý ďalší krok je náročnejší ...

- Všimli ste si?

[12]Poruchou sa bežne vo fyzike myslí, že máme nejaký systém, ktorý je sám osobe jednoduchý (alebo rozumne riešiteľný) a do neho vložím nový člen – poruchu –, ktorý jeho správanie skomplikuje,

... a tak si od istého bodu môžeme povedať, že nám ďalšie spresnenie nestojí za tú prácu. Malý parameter, ktorý stojí pri člene, ktorý nám narúša *peknú* rovnicu voláme porucha a označujeme ε.

- Porovnajte s predošlým príkladom.
- Aké sú pravidlá infinitezimálneho počtu? Dáva $\varepsilon^2 \sim 0$ zmysel?

Riešenie takejto rovnice [13] hľadáme v tvare

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ..., \tag{93}$$

kde y_0 je riešenie nenarušenej rovnice. Takže, poďme späť k fyzike. Potenciálna energia pre náš oscilátor bola $U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{g}{4}x^4$, čo vedie na pohybovú rovnicu

$$m\ddot{x} = -kx - gx^3 \leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x + \epsilon x^3 = 0, \tag{94}$$

kde ϵ je malý parameter.

- Má tento parameter rozmer?

Pre ňu budeme hľadať riešenie v tvare

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ... \tag{95}$$

Všetky x_i sú funkcie času, nepíšeme to kvôli prehľadnosti. Postupne nám spresňujú pôvodné riešenia. Takýto tip na riešenie [14] dosadíme do (94) a pozbierame dokopy členy, ktoré majú rovnaké mocniny ε:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \left(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0\right) && (96) \\ + \quad & \varepsilon \left(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3\right) \\ + \quad & \varepsilon^2 \left(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 3x_0^2 x_1\right) \\ + \quad & ... = 0. && (97) \end{aligned}$$

Tak a teraz príde dôležitý (mentálny) krok – ak je ε dostatočne malé, tak členy v jednotlivých riadkoch sú rôzne veľké; predstavte si $\varepsilon = 10^{-3}$ v nejakých prirodzených jednotkách.

[13] Používame tu zatiaľ matematické označenie $y(x)$, za chvíľu sa vrátime k fyzikálnemu $x(t)$. Nebojte, sú to len písmenká.

[14] Tip na riešenie sa odborné volá *ansatz*, vraj je to jedno z najkratších nemeckých slov.

Aby sa všetko rovnalo nule, tak sa nule musí rovnať každá zátvorka. Prvá obsahuje x_0, druhá x_0, x_1, tretia x_0, x_1, x_2 a tak ich vieme riešiť postupne. Aj keď, ako je asi vidno, obtiažnosť rovníc narastá a tak to skôr či neskôr zabalíme. Predsa len, riešenie spresňujeme len jemne. Na druhú stranu, po dosť dlhom čase sa aj tieto malé zmeny nesčítajú, takže týmto postupom získavame len prinajlepšom približné riešenie. Ale také nám často stačia. Takýto postup je vo fyzike veľmi bežný – najprv úlohu vyriešime zjednodušene a zjednodušené riešenie potom postupne „okoreníme“ malou poruchou.

- Skúste opísať, ako by sa touto metódu dal riešiť voľný pád s odporom vzduchu.

Tým sa naša LHO cesta dostáva ku koncu. Asi uznáte, že najjednoduchší možný fyzikálny systém toho ukrýva mnoho a naučili sme sa metódy, ktoré majú aplikácia na mnohých ďalších miestach fyziky. Pochopili sme, ako rozkladať zložité problémy na jednoduché (Fourierov rozvoj), ako si niekedy zjednodušíme počty tým, že si ich skomplikujeme (komplexné riešenie tlmeného LHO), prečo sa toľko vecí okolo nás vlní, kmitá a vibruje (malé kmity a vlastné frekvencie). No a na záver sme si ukázali, ako krok po kroku postupovať od jednoduchého riešenia k zložitému.

Príklady

1. časť

- Vyriešte tlmený oscilátor bez použitia komplexných čísiel.
- Nájdite čo najviac príkladov rezonancie vo svete okolo nás.
- Spočítajte veľkosť a fázu komplexného čísla $\frac{1}{2+i} - i$ a zapíšte ho v exponenciálnom tvare.
- Dokážte $\sin(ix) = i \sinh(ix)$ (návod: Taylorov rozvoj).
- Dokážte $\sinh(ix) = -i \sin(ix)$ (návod: Buď tiež, alebo využiť predošlý príklad a zamyslieť sa).

2. časť

- Pre jednoduchosť budeme uvažovať funkcie na intervale $0 < x < L$, ktoré spĺňajú $f(0) = f(L) = 0$. Premyslieť si, prečo sa takéto dajú zapísať v tvare $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

- Nakreslite prvé tri funkcie $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ pre $n = 1, 2, 3$.

- Aby sme použili Fourierov rozvoj, potrebujeme vedieť určiť koeficienty a_n. Na to si potrebujeme ujasniť jednu vec, aký je itegrál $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$. (Návod, použiť vzorec pre $\cos(a+b)$.)

- Predstavte si, že máme $f(x) = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + a_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$. (Ponaučenie, $a_n \sim \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$).

- Sformulujte vzorec pre a_n, teda pre určenie koeficientov Fourierovho rozvoja.

- Spravte Fourierov rozvoj funkcie $f(x) = x(x - L)$. (Fourierov rozvoj predpokladá, že funkcia je periodická. Kde tento rozvoj správne zreprodukuje funkciu?)

- Máte oscilátor s tuhosťou k, hmotnosťou m, ktorý je vynucovaný periodickou silou, ktorá na intervale $0 < t < T$ vyzerá ako $f(t) = t(t - T)$. Spočítajte, akým spôsobom bude kmitať náš oscilátor?

- Ako treba upraviť odvodený postup pre funkcie, ktoré majú všeobecné okrajové podmienky, teda nemusia nutne spĺňať $f(0) = f(L) = 0$.

3. časť

- Nájdite (vlastný) rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, teda nájdite vlastné funkcie a vlastné hodnoty. Overte, že naozaj ide o vlastné vektory (násobenie maticou ich len preškáluje) a zostrojte a overte rozklad $A = Q\Lambda Q^{-1}$).

- Nájdite vlastné funkcie operátora $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b\,\frac{\partial}{\partial t}$.

- Čo sa stane, ak mám dve pružinky s tuhosťami k, k' a zapojím ich vedľa seba a za seba? Aká bude ich efektívna tuhosť?

4. časť

- Kyvadlo sa správa ako LHO len v prvom priblížení, pridajte prvú opravu (rozvoj spravte do ďalšieho nenulového rádu) a opíšte, ako to zmení správanie kyvadla.

Projekty

- Spracovať anharmonický oscilátor numericky.
- Spracovať tému ortogonálnych polynómov.

7 Vlny

Hľa, toto je vlnová rovnica

$$\ddot{u}(\mathbf{r},t) = c^2 \Delta u(\mathbf{r},t), \tag{98}$$

kde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + ...$ je Laplaceov operátor. Jej odvodenie je cvičenie, vieme si však už na základe predošlých kapitol predstaviť, ako by sa dala odvodiť?

- Ako vyzerá v jednom rozmere?
- Ako vyzerá z pohľadu jedného bodu?
- Je táto rovnica lineárna?

Premennou v týchto rovniciach je $u(x,t)$, ktorú si teraz môžete predstaviť napríklad ako vertikálnu výchylku vodnej hladiny [15], no takouto rovnicou sa riadi všeličo: deformácie materiálu, tlak vzduchu v miestnosti či elektromagnetické vlnenie. Jednorozmernú vlnu si môžete často predstaviť ako šíriacu sa po lane, ktoré je natiahnuté na osi x, často od nekonečna do nekonečna, a výchylka sa deje v smere osi y.

Už sme si zvykli, že diferenciálna rovnica potrebuje počiatočné podmienky ...

- Táto koľko?

... no teraz potrebujeme aj okrajové podmienky. V jednorozmernom prípade máme pre každý koniec typicky tri možnosti pre okrajové podmienky: pevné konce (Dirichletova okrajová podmienka), voľné konce (Neumannova okrajová podmienka) alebo žiadne nie sú (systém nemá koniec, napríkklad nekonečne dlhé lano). Pevný koniec sa opisuje podmienkou $u(x_0,t)$ a voľný koniec podmienkou $\frac{\partial}{\partial x} u(x_0,t)$.

- Ako to rozšíriť do viacerých rozmerov?

Teraz sa pustíme do riešenia vlnovej rovnice, budeme sa sústrediť na jednorozmerný prípad, ktorý je rozkošný v tom, že sa dá riešiť dvomi rôznorodými spôsobmi. Ten prvý z nich sa nedá používať vo viacrozmerných prípadoch, no ponúka skvelý vhľad a tak si cez neho prejdeme.

[15] Ako sa dá ukázať, no je nad rámec tohto kurzu, vodná hladina je mizerný príklad vlnenia, lebo mnohé z toho, čo si povieme tam neplatí. Vlny na vode sú veľmi nereprezentatívne, no máme s nimi skúsenosť, tak sa pomocou nich dobre opisujú iné veci.

7.1 D'Alambertovo riešenie

Riešenie podľa d'Alamberta spočíva v dvoch krokoch. Po prvé, rovno ho napíšeme, lebo vždy vyzerá rovnako. Po druhé, riešenia nakombinujeme tak, aby spĺňali okrajové a počiatočné podmienky. Riešenie vlnovej rovnice má tvar $u(x,t) = u(x \pm c\ t)$.

- Dokážte to.

Začnime jednoduchou situáciou bez okrajov, máme nekonečne dlhé lano a zadané počiatočné podmienky

$$u(x,0) = h(x), \dot{u}(x,0) = 0. \tag{99}$$

Riešenie, ktoré spĺňa vlnovú rovnicu s takýmito počiatočnými podmienkami je

$$u(x,t) = \frac{h(x+ct) + h(x-ct)}{2}. \tag{100}$$

- Prečo sme nemohli zobrať len jednu časť?
- Modifikujte riešenie pre počiatočné podmienky $u(x,0) = 0, \dot{u}(x,0) = g(x)$.

Zaujímavé, nie? Riešime diferenciálnu rovnicu druhého rádu s ľubovoľnými počiatočnými podmienkami bez toho, aby sme hocičo riešili. Kľúčovú úlohu zohráva skutočnosť, že vlna nie je nutne niečo, čo sa vlní – ale niečo, čo sa pohybuje s fixným profilom.

Poďme skúsiť pridať okrajovú podmienku. Majme polonekonečné lano ukotvené v bode $x = 0$, teda $u(0,t) = 0$ a počiatočnú podmienku $h(x), x > 0$. Zoberme teraz novú, nepárnu, funkciu, ktorá je zadefinovaná takto:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(-x), x < 0, \\ h(x), x \geq 0. \end{cases} \tag{101}$$

- Akú hodnotu má $h(0)$?

Inými slovami, funkciu definovanú na polovici intervalu sme nepárne rozšírili na interval celý. Riešenie rovnice je teraz

$$u(x,t) = \frac{\tilde{h}(x+ct) + \tilde{h}(x-ct)}{2}. \tag{102}$$

- Dokážte.

- Ako by ste postup modifikovali pre voľný koniec?

- Ako by ste postup modifikovali pre dva pevné/voľné konce?

Tento postup je veľmi pekný, riešime bez riešenia. Vo vyššom počte rozmerov to už nefunguje, vlny sa pohybujú nekonečným počtom smerov, tu sa rozbiehali len dvomi.

Použili sme ale zaujímavú fintu (pri pevnom konci). Pôvodné zadanie sme nahradili iným, ale takým, aby tam, kde bolo platné, vyzeralo všetko rovnako. Častice v bode $x > 0$ nevie, či je naľavo od nej pevný koniec alebo k nej prichádza vlna, ako keby bol – správa sa len podľa toho, čo práve cíti, aké sily na ňu pôsobia a tak sa musím pohybovať rovnako. Rozšírili sme zadanie tak, aby v relevantnej časti priestoru dopadlo rovnako, ale nám sa celkovo riešilo ľahšie. Takýto postup sa používa dosť často.

- Kľúčovú úlohu zohráva takzvaná jednoznačnosť riešenia diferenciálnej rovnice. Ako ju opísať slovne?

7.2 Separácia premenných

Poďme teraz na univerzálnejšiu metódu separáciou premenných. Predpokladajme, že sa dá riešenie napísať v tvare:

$$u(x,t) = A(x)B(t), \tag{103}$$

- Vymyslite príklady funkcie, s ktorými sa to dá a s ktorými nie.

Hovorí sa tomu separácia premenných. Dosadíme do vlnovej rovnice a predelíme obe strany s $u(x,t)$, dostaneme

$$\frac{c^2A''(x)}{A(x)} = \frac{\ddot{B}(t)}{B(t)}, \tag{104}$$

to na prvý pohľad nevyzerá ako krok k svetlejším zajtrajškom, kým si neuvedomíme, že z tohto zápisu vyplýva, že ľavá aj pravá strana rovnice musia byť rovné konštante!

- Prečo?

- Naozaj, prečo? Toto je dôležité! Pokojne si dosaďte cvičnú funkciu $x^p t^q$. [16]

Takže, zrazu máme dve rovnice

$$\begin{aligned} \frac{c^2 A''(x)}{A(x)} &= -\lambda, \\ \frac{\ddot{B}(t)}{B(t)} &= -\lambda. \end{aligned} \tag{105}$$

To sa poníma na starý dobrý LHO. Rovnice pre $A(x)$ je však predsa len trochu iná. Kým pre LHO sme mali dve počiatočné podmienky, napríklad pre $x'(t_0)$ a $x(t_1)$ (pričom bežne $t_0 = t_1$), teraz máme okrajové podmienky pre dva konce. Ak je vlniaci sa objekt pevne zachytený (alebo voľný) tak v danom bode platí, že $A(x_0) = 0$ (alebo $A'(x_0) = 0$). Riešenie budú mať tvar $A(x) = A_1 \sin\sqrt{\lambda}x + A_2 \cos\sqrt{\lambda}x$ a $B(T) = B_1 \sin\sqrt{\lambda}t + B_2 \cos\sqrt{\lambda}t$.

- Prečo sú tie ostatné riešenia nevhodné?

Vidíme, že medzi oscilovaním v čase a v priestore je súvis! Pozrime sa možnosť pevných koncov v bodoch $0, L$. V takom prípade máme požiadavku, že $A(0) = A(L) = 0$. Z toho máme hneď, že $A_2 = 0$ (aby bol kosínusový člen v nule nulový). Druhá podmienka je, že

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0. \tag{106}$$

Sínus je nulový, ak je v jeho argumente násobok π, takže musí platiť, že $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$, respektíve $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. To nám zafixovalo možné frekvencie. Hodnoty B_1 a B_2 určíme z počiatočných podmienok pre výchylku $u'(x,0) = y(x)$.

- Ako?

- Ide o stojaté alebo pohyblivé vlny?

- Ako sa bude vlnenie správať, ak dĺžku intervalu pošlem do nekonečna? (Teda pôjde o vlnenie na priamke)?

[16] Toto je tak dôležité, že si prezradíme odpoveď. Zo separácie dostaneme rovnicu v tvare $f_1(x) = f_2(y)$. Obe x, y sú nezávislé premenné, takže obe môžu nadobúdať hocijaké hodnoty. Ak x zafixujem, y mením a rovnica stále sedí, tak jedine preto, že $f_2(y)$ je konštantná funkcia! A podobne pre x.

Ak máme pevná konce, tak riešenie má tvar $u(x,t) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Čo sa stane, ak vlny vynucujem? Teda ak mám vlnovú rovnicu v tvare

$$\ddot{u} = c^2 u'' + F(x,t). \tag{107}$$

Riešenie má podobná logiku, ako pri LHO. Krok jedna: spraviť rozvoj sily $F(x,t) = \sum_n a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Všimnite si, že koeficienty rozvoja závisia od času – to do riešenia vnáša dynamiku. Dosadením do vlnovej rovnice dostanem rovnicu pre koeficienty

$$\ddot{a}_n(t) + \left(\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}\right) a_n(t) = F_n \tag{108}$$

- Pripomeňme si, čo je to homogénne a čo partikulárne riešenie rovnice?
- Ako by sa situácia zmenila, ak by sme namiesto čiary mali vlny vo štvorci?
- Ako by sa situácia zmenila, ak by sme namiesto čiary mali vlny v kruhu?

Spôsob, akým rozmýšľať o vlnovej rovnici je taký, že úlohu si vždy chceme rozbiť na časovú a priestorovú časť. Časová časť riešenia je starý dobrý oscilátor, pričom možné frekvencie nám určí priestorová časť úlohu, koeficient nastavíme z počiatočných podmienok. Kľúčová časť je teda priestorová časť v tvar $\Delta A(\mathbf{r}) = -\lambda A(\mathbf{r})$ spolu s okrajovými podmienkami pre funkciu $A(x)$ či jej deriváciu $A'(x)$ na hranici. Odborne povedané, ide o hľadanie vlastných funkcií laplaciánu a jeho vlastných hodnôt, oni kódujú všetko dôležité týkajúce sa vlnenia.

- Ako by ste napísali Laplaceov operátor v polárnych súradniciach? Aké má vlastné funkcie?
- Sú riešenia kolmé? (V kontexte, ako sme mali pri Fourierovej transformácií.)
- Zatiaľ sme sa rozprávali len o skalárnom vlnení, čo to znamená? Ako by sa pracovalo s vektorovým vlnením?

Všimnite si zvláštnosť. To, aké vlny sa môžu šíriť objektom závisí od jeho počtu rozmerov ale aj od jeho tvaru. Na základe toho vznikla otázka: „Can we hear the shape of a drum?“ Inými slovami, ak poznám spektrum vlnenia, možné frekvencie, viem z toho jednoznačne určiť tvar telesa? Existuje súvis jedna k jednej medzi tvarom a spektrom? Ukazuje, že nie – existujú objekty s rôznymi tvarmi a rovnakými spektrami [17]

[17] Má to však poznámku pod čiarkou, ktorá to komplikuje.

7.3 Príklady

- Odvodiť vlnovú rovnicu.
- Odvodiť Laplaceov operátor v polárnych súradniciach.
- Nájdite riešenie vlnovej rovnice na úsečke $0 \leq x \leq L$ s počiatočnými podmienkami $u(x,0) = x(x-L)/L^2$ a $\dot{u}(x,0) = \frac{v \sin \pi x/L}{L}$.
- Na prednáške sme vyriešili d'Alambertovou metódou úlohu, kde sme mali vlnenie na polpriamke, pričom v počiatku bol koniec pevný. Ako by ste zostrojili riešenie pre voľný koniec?
- Ako by ste d'Alambertovu metódu aplikovali pre vlny na úsečke? (Návod: periodické rozšírenie počiatočných podmienok.)
- Odvodiť Laplaceov operátor v polárnych súradniciach.
- Nájdite riešenie vlnovej rovnice na úsečke $0 \leq x \leq L$ s počiatočnými podmienkami $u(x,0) = \frac{v \sin \pi x/L}{L}$ a $\dot{u}(x,0) = x(x-L)/L^2$ (naopak ako na hodine).

Projekty

- Aké vlny sú na gitare, stojace či pohybujúce sa?
- Vyriešiť vlnenie v dvojrozmernom štvorci.

8 Fyzika tečenia

Fyzika tečenia je elegantne opísaná rovnicou, ktorá je známa tým, že úplne nepoznáme vlastnosti jej riešení (je za to miliónová odmena). Začnime tým, že sa na ňu pozrieme

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right)=-\nabla p+\rho\mathbf{g}+\eta\left(\Delta\mathbf{v}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\right) \tag{109}$$

Na prvý pohľad vyzerá dosť desivo, predstavme si matematické podklady na jej zápis a potom ju poskladáme dokopy tak, aby sme jej jednotlivým členom rozumeli.

Tu by v princípe ešte mohlo byť matematické okienko o indexovej matematike. Ide o efektívny nástroj ako pracovať s vektorovými operátormi (rotácia a podobne). Okrem tejto kapitoly by sme ho však využili len minimálne. Preto si z neho zoberieme len jedno (Einsteinovo) pravidlo: index sa v rovniciach môže opakovať raz alebo dvakrát. Ak sa opakuje dvakrát, tak sa tým myslí, že cez daný index sumujeme. Teda, ak niekde uvidíte $a_i b_i$, tak si pod tým predstavte $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i b_i$. Bez tohto pravidla by boli rovnice preplnené sumovacími symbolmi. Kto by sa mu chcel povenovať viac, môže v rámci projektu.

8.1 Plošné a objemové sily

Prvá vec, ktorú si treba ujasniť, je, že ako vlastne rozmýšľam o tekutine. Rozmýšľam o nej ako o kontinuu infinitezimálne malých objemov.

- Čo sú to objemové sily? Ako z nich dostanem celkovú silu?

Pre objemové sily platí vzťah

$$\mathbf{F}_o=\int d\mathbf{f}=\int \mathbf{f}dV, \tag{110}$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ je objemová hustota sily. Teda napríklad, ak chcem spočítať, aká gravitačná sila pôsobí na nejaké teleso, pomyselne ho nakrájam na malé kúsky – každý môže mať napríklad inú hustotu – a výsledok sčítam.

- Čo sú to plošné sily? Aký smer môžu mať?

- Aká je gravitačná hustota sily pre vodu v pohári?

Nezabúdajte, plochu berieme ako vektor – smer je kolmý na povrch a (infinitezimálna) veľkosť je veľkosť plochy. Sila môže pôsobiť v princípe rôznymi smermi

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j. \tag{111}$$

Tenzor σ_{ij} musí byť symetrický (tvrdenie dávam bez dôkazu, vychádza to z toho, aby sa zachovával moment hybnosti).

- Čo je to tenzor?

Integrál po ploche vieme zameniť za integrál po objeme, spomeňte si na Guassovu vetu.

- Aká bola myšlienka?

Zapísané v zložkách máme silové pôsobenie na infinitezimálne malý objem

$$(f_i + \partial_j \sigma_{ij})\, dV. \tag{112}$$

Symbol ∂ je jednoduchou skratkou pre $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Sily, ako sme zvyknutí, spôsobujú zrýchlenie, pričom hmotnosť infinitezimálneho elementu je $dm = \rho dV$ a teda dokopy máme

$$\rho a_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i. \tag{113}$$

8.2 Eulerova a Naviar-Stokesova rovnica

Pri pohľade na tečenie existujú dva možné pohľady na vec. Prvý je taký, že sledujeme pohyb nejakého elementu „pozdĺž“ tečenia. Druhá možnosť je taká, že sa zameriame na fixný bod a skúmame, ako to tečie v ňom. Ten druhý pohľad sa volá Eulerov a budeme sa ho držať. Toto má na svedomí miernu komplikáciu. Uvažujme rýchlostné pole v nejakom bode a čase, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Zmenu podľa času spočítame cez

$$dv_i(\mathbf{r}, t) = v_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, t + dt) - v_i(\mathbf{r}, t), \tag{114}$$

tým pádom

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{115}$$

Pre zrýchlenie poľa v danom bode tak platí, že

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v}. \tag{116}$$

Vyzerá to zložito, no má to jednoduché vysvetlenie. Rýchlosť prúdenia sa v danom bode mení kvôli tomu, že tam pôsobí zrýchlenie a zároveň kvôli tomu, že tam iná rýchlosť dotiekla! To by sme mali ľavú stranu rovníc. Pozrime sa na pravú, aké sily pôsobia na teleso? Ako objemová sila je (napríklad) gravitačná sila, $\rho\mathbf{g}$. Čo sa týka plošných síl, záleží od toho, či uvažujeme trenia medzi plochami (viskozita). Ak nie, tak je plošná sila len tlaková – tá je vždy kolmá na plochu, teda $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

- Čo predstavuje symbol δ? (Nápoveda: je to jednoduchá matica.)

Vo výsledku dostávame Eulerovu rovnicu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}. \tag{117}$$

Toto ešte nie je všetko, pribúda k tomu ešte rovnica kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{118}$$

V prípade viskóznej kvapaliny je situácie mierne zložitejšia, lebo pribúdajú sily nekolmé na plochu, napríklad $dF_1 = \sigma_{13} dS_3$, inými slovami σ prestáva mať diagonálny tvar.

- Prečo? Nápoveda: predstavte si dve o seba šúchajúce plochy, akým smerom pôsobí sila?

Táto sila vzniká len vtedy, ak sa jednotlivé plochy pohybujú rôznymi rýchlosťami, teda $dF_1 \sim \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$. Z toho vidíme, že $\sigma_{13} = \eta \partial_3 v_1$, kde η je koeficient viskozity (toto je jeho definícia). Pre ľubovoľný smer by sme čakali, že $\sigma_{ij} = \eta\,(\partial_j v_i)$. Treba si ale spomenúť, že tenzor by mal byť symetrický a tak máme

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\,(\partial_j v_i + \partial_i v_j)\,. \tag{119}$$

Viskózny člen sa dá zapísať pomocou diferenciálnych operátorov ako $\eta\,(\Delta \mathbf{v} + \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{v}))$. Dokopy získavame slávnu Navier-Stokesovu rovnicu

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \eta\,(\Delta \mathbf{v} + \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{v}))\,. \tag{120}$$

Príklady

- Čo sú to: indexová matematika, Einsteinova sumačná konvencia, symetrické a antisymetrické tenzory?
- Dokázať, že:
  1. $\delta_{ii} = 3$,
  2. $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$.
- Z Navier-Stokesových rovníc odvoďte rovnicu pre hydrostatický tlak.
- V akom najmenšom objeme vody môže plávať tisíc tonová loď?
- Spočítajte:
  1. Δr^2,
  2. $\partial_i r$,
  3. $\partial_i \frac{1}{r}$,
  4. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,
  5. $\nabla \times (\nabla f) = 0$.
- Dokážte, že $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. Môže sa zísť identita: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta km$.
- Pre nevírové prúdenie platí, že $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Zdanlivo bez vysvetlenia spočítajte $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$. Pomocou tohto vnuknutia upravte Eulerovu rovnicu na Bernoulliho rovnicu.

Projekty

(Prvé 4 projekty očakávajú, že si vyhľadáte a spracujeme k nim už známe výpočty.)

- Aké sily vznikajú na krídle počas letu?
- Akú hmotnosť unesie šarkan? (Bonus: overiť prakticky)
- Vysvetliť fyziku Kelvin–Helmholtzovej nestability.
- Odvodiť rovnicu pre morské vlny.
- Spraviť úvod do využitia indexovej matematiky.

9 Štatistická fyzika a termodynamika

9.1 Energia

- Viete, z čoho rastú stromy?

Kde sa berú stromy? Nerastú vďaka hline, ale vďaka vzduchu. Berú z neho oxid uhličitý a ten (spolu s vodou) pretvárajú na sacharidy. Energia sacharidových molekúl je vyššia, než energia oxidov uhličitých a vody. Rozdiel zaplatilo Slnko cez svoje lúče zachytené fotosyntézou.

Keď organizmus rastlinu spása, rozbije – za pomoci kyslíka – sacharidy a vydýchne oxid uhličitý a vodu. Získaný energetický rozdiel využije na viac či menej zmysluplnú činnosť. Na vydýchnutý oxid uhličitý už čakajú rastliny, aby ho znova mohli prijať. Tomuto sa hovorí uhlíkový cyklus, ide o hlavný proces získavania energie pre život na (nielen?) našej planéte.

Čo sa stane, keď hodíte masu sacharidov do horúcej plazmy (teda polienko do ohňa)? Molekuly sa rozbijú na drobné a spoja s kyslíkom, pričom sa uvoľní energia vo forme tepla a svetla.

- Čo by sme museli spraviť, aby sme mohli horenie odrobiť?

Prvé dôležité ponaučenie je také, že energia je dôležitý pojem nielen v makrosvete aj mikrosvete. Makrostav je stav opisujúci systém z nášho pohľadu, bez ohľadu na detaily. Mikrostav opisuje všetko do posledného detailu a častice.

- Ako je to možné?

9.2 Entropia

Energia však nie je jediná časť príbehu. Druhý pojem dôležitý pre **veľa** interagujúcich častíc je entropia, miera neusporiadanosti. Ako ju uchopiť? Pozrime sa na príklad kociek. Priemerný hod na hracej šesťstenke je 3.5, priemer celých čísiel 1 až 6.

- Aká je distribúcia pravdepodobnosti pre dve kocky a prečo?

Keď hodím kocku raz, výsledok bude ďaleko od strednej hodnoty. K strednej hodnote sa priblíži až pri (limitne nekonečnom) počte hodov.

- Poznáte centrálnu limitnú vetu?

Ekvivalentne sa k strednej hodnote priblížim aj ak hodím veľa rôznych kociek naraz. Čím ich je viac, tým presnejšie výsledok opisuje stredná hodnota! Vráťme sa k dvom kockám. Predstavte si 6×6 tabuľku s možnými výsledkami.

- Čo by v tomto príklade mohlo predstavovať mikrostav a makrostav?

Entropiu sme zatiaľ opísali ako mieru neusporiadanosti, chcelo by to exaktnú definíciu. Historicky sa objavila najprv v termodynamickom kontexte, na štatistické nohy ju postavil Ludwig Boltzmann [18]:

$$S = k_B \log \Omega, \tag{121}$$

kde Ω je počet mikrostavov odpovedajúcich danému makrostavu.

- Prečo entropia s časom rastie? Nápoveda: Má to štatistický dôvod, predstavte si kocky.

- Prečo je v jej definícii logaritmus?

Entropia sa niekedy opisuje ako miera chýbajúcej informácie. Dá sa to predstaviť znovu na dvoch kockách. Ak na dvoch kockách padlo dokopy 3, tak sú v podstate len dve možnosti, $1-2$ a $2-1$. Na to, aby ste vedeli, ktorá možnosť je správna vám stačí vedieť málo informácie (konkrétne jeden bit). Ak však na kockách padlo dokopy 7, je stále veľa možností a tak na úplné spresnenie potrebujete viac informácií. Čím väčšia entropia, tým viac informácie vám chýba, ak viete len makrostav a chcete vedieť mikrostav.

- Čo vlastne znamená slovo pravdepodobnosť? Ak hodím kocku a nepozriem sa na výsledok, ako má zmysel o výsledku rozprávať ako o neistej veci?

Poďme sa pozrieť na základný príklad, retiazku spinov. Retiazka spinov je systém N častíc, z ktorých každá môže byť v dvoch rôznych stavoch, napríklad hore a dole (pokojne si tak pod spinom predstavujte mince).

- Aký je počet usporiadaní systému N spinov?

- Aký je počet usporiadaní systému N spinov, keď n spinov mieri hore a zbytok dole?

[18] Zo zvedavosti si nájdite jeho náhrobok, nachádza sa tam práve tento vzorec.

- Pre akú hodnotu n dosahuje entropia maximum?

- Aká je jej hodnota (všimnite si úmernosť s N a porovnajte so správaním energie)?

Najviac stavov je takých, kde sú spiny hore a dole rozdelené približne pol na pol. Ak začneme so systém ďaleko od takéhoto stavu a začneme do neho náhodne štuchať, postupne sa k tomuto rovnovážnemu stavu priblíži. Stav na začiatku mal nižšiu entropiu ako stav na konci – hľa, entropia spontánne narastá, bez vedomého zásahu, stačilo náhodné šťuchanie.

Pozrime sa na *zdanlivo* iný príklad: entropické napätie v polyméroch. Modelujme polymér ako jednorozmernú retiazku, kde každý diel je natočený buď vpravo alebo vľavo. Ak je každé natočenie rovnako pravdepodobné, aká bude priemerná dĺžka (začiatok prvého a posledného bodu) polyméru?

- Aká je entropia systému ak je n_R z N dielikov natočených vpravo?

- Pre aké n_R to dosahuje maximum?

Ponaučenie je také, že polymér má tendenciu sa zrolovať a na jeho vystretie potrebujeme pôsobiť silou. Mimochodom, prečo sa rozpínajú plyny a prečo tlačia na stenu nádoby? Identický princíp, len u nich nárast entropie znamená zväčšiť objem, ktorý zaberajú.

9.3 Teplota

- Čo je to pocit vysokej a nízkej teploty?

Čo sú základné vlastnosti teploty? Asi najočividnejšou je, že po prvé, v závislosti od teploty sa veci správajú rôzne ...

- ako napríklad?

...a že ak sú v kontakte dve veci s rôznou teplotou, ich teplota sa vyrovná. Táto skutočnosť tvorí polovicu základných zákonov termodynamiky.

- **Nultý zákon:** Ak sú dve telesá v tepelnej rovnováhe s tretím, sú v rovnováhe aj so sebou.

- **Prvý zákon:** Energia sa zachováva.

- **Druhý zákon:** Teplo spontánne prúdi z teplejšieho telesa do chladnejšieho.

- **Tretí zákon:** Konečným počtom vratných krokov sa nedá dosiahnuť minimálna teplota.

Zvláštne zákony, nie? Jeden už sme niekde videli, dva sú pomerne jednoduché tvrdenie o niečom, čo zatiaľ nemáme definované. Takže, čo je to teplota? Medzi jej najočividnejšie prejavy teploty platí rozťažnosť, napríklad plynov.

- Na tomto princípe fungujú napríklad teplomery. Ako?

Ak označíme teplotu ako niečo, čo je lineárne úmerné objemu plynu, rovno vidíme, že existuje možnosť minimálnej teploty. Takto existenciu absolútnej nuly vytušil, a jej hodnotu celkom dobre odhadol, Guillaume Amontons začiatkom 18. storočia.

- Prečo je tento opis neúplný?

Lepšie (dokonca až takmer dobrá) definícia teploty je, že je to miera mikroskopického pohybu častíc

$$\langle E\rangle = \gamma\frac{1}{2}kT, \tag{122}$$

kde γ je počet stupňov voľnosti.

- Čo to bol ten stupeň voľnosti?

Mikrosvet sa stretol s makrosvetom! Z tohto zákona vyplýva stavová rovnica pre ideálny plyn:

$$pV = NkT. \tag{123}$$

- Ako sa z jednej rovnice dostane druhá?

Okrem jednej konštanty sa v tejto rovnici stretávajú 4 dôležité dynamické premenné. Všimnite si zaujímavú vec, ak spojíte dve nádoby s plynmi dokopy tak sa niektoré ich vlastnosti nezmenia (teplota, tlak) a niektoré sa zdvojnásobia (počet častíc, objem). Tým prvým hovoríme intenzívne (sú lokálne, nezávisia na celku) a tým druhým extenzívne (naopak).

Dynamické veličiny sú dynamické v tom, že sa môžu meniť. Stavová rovnica nám hovorí aj o tom, ako sa stavy môžu (niekedy) meniť – treba si však dávať pozor, ako sa správajú jej jednotlivé zložky.

- Čo je to (ne)vratný proces?

Pri dejoch bežne uvažujeme, že sa niečo nemení. Typicky sa pri jednoduchých úlohách nemení počet častíc. Keď sa nemení teplota, hovoríme izotermických dejoch, podobne máme izobarické a izochorické deje, pri ktorých sa nemení tlak či objem. Napríklad pri izotermickom deji platí $pV = \text{const}$ – stavová rovnica nám priamo udáva, ako sa menia nefixované veličiny. Iný uhol pohľadu je aj taký, že nám táto rovnica dáva návod na to, že ako meniť stavové veličiny tak, aby teplota zostala rovnaká.

- Ako to vyzerá v pV diagrame a čo to pV diagram vlastne je?

Jeden veľmi dôležitý dej však medzi tieto tri nespadá. Ide o adibatický dej – dej tak rýchly, že nedochádza k výmene tepla s okolím. Aby sme ho dokázali uchopiť, vráťme sa o dva kroky späť – k prvému zákonu termodynamiky. Zmena vnútornej energie je daná cez

$$dU = \delta Q - \delta W + \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j dN_j. \tag{124}$$

Toto vyzerá ako dosť veľký skok, poďme si to rozbiť na drobné. Člen na ľavej strane rovnice je zmena vnútornej energie systému, prvý člen napravo je teplo, ktoré bolo systému odovzdané a druhé je práca, ktorú systém vykonal. Všetky tieto veličiny sú infinitezimálne malé. Prečo máme d a δ? To prvé označuje diferenciál, v zmysle malá zmena veličiny, napríklad objemu, $dV = V(x + dx) - V(x)$. To druhé označuje malé množstvo niečoho. Napríklad vykonaná práca pôsobením sily po krátkej dráhe je $\delta W = F dx$, nemá to však zmysel písať ako $W(x + dx) - W(x)$. Odborne sa tomu hovorí (ne)exaktný diferenciál [19].

Posledný člen na pravej strane je energia, ktorú potrebujeme na dodanie či obratie častice zo systému pri konštantnej entropii (podľa znamienka); μ sa volá chemický potenciál. Teraz budeme skúmať len situácie s $dN = 0$, takže nás tento člen nebude zaujímať, ale je dobré ho spomenúť, aby bolo jasné, ako sa dajú uchopiť systémy s premenlivým počtom častíc.

Pozrime sa teraz na celú rovnicu: zmena vnútornej energie je daná ako rozdiel dodaného tepla a vykonanej práce. Prácu sa dá vykonávať rôzne, nám bude stačiť prípad $\delta W = p dV$, teda mechanický tlak.

[19] Tieto veci sme mierne naznačili pri analýze klasickej mechaniky.

- Ako sa vlastne niečomu dodáva teplo, čo to znamená? Nie je presnejšie povedať, že sa teplo koná?

- Viete vymyslieť aj iné príklady práce ako zväčšovanie objemu tlakom?

- Ako sa teda mení tlak, objem a teplota pri adiabatickom deji?

Výskum termodynamiky viedol k praktickým objavom, ktoré viedli k industriálnej revolúcii.

- Pripomeňme si fugovanie Carnotovho stroja.

Účinnosť Carnotovho stroja – ktorý je z definície optimálnym –, je limitovaná a súvisí s teplotou

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}. \tag{125}$$

Z istého uhla pohľadu ide o ďalšiu definíciu teploty! Pre ľubovoľný Carnotov cyklus platí, že $\oint \delta Q \neq 0$. Zároveň si polovici 19. storočia Rudolf Clausius všimol, že platí $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$. Vyzerá to tak, že $\delta Q/T$ popisuje exaktný diferenciál niečoho! Čoho? No predsa entropie! Takto sa objavila entropia najprv v termodynamike, ako nová užitočná stavová veličina, ktorej zmena je daná ako

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \tag{126}$$

- Prečo máme radšej veličiny s d namiesto δ?

- Ako by ste spočítali entropiu v pohári vody?

Entropia plynu sa dá aj spočítať, výsledok pre jednoatómový plyn je známy ako Sackur–Tetrode entropia [20]

$$S = \frac{5}{2} N k_b + N k_b \log \left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N} \right)^{\frac{3}{2}} \right), \tag{127}$$

kde h je Planckova konštanta, k nej sa dostaneme čoskoro. Netreba to vedieť naspamäť, je to však ukážka toho, že pre jednoduchý systém vieme pre entropiu získať konkrétne vyjadrenie. Pri fixnom objeme a počte častíc platí, že

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}, \tag{128}$$

[20] Ukazujeme si to hlavne kvôli tomu, aby bolo jasné, že je to niečo síce nie úplne priamočiare, no matematicky dobre uchopiteľné.

a to je ďalšia definícia teploty. A nie hocijaká, asi jedna z najlepších. Prečo? Na jej definíciu netreba viac, než vedieť, že má systém energiu a mieru neusporiadanosti, entropiu; funguje teda aj na veci, na ktoré je bežná definícia prikrátka. Mimochodom, niekedy sa používajú aj označenie pre inverznú teplotu $\beta = 1/T$.

- Podumajte nad toto skutočnosťou. Teplota je niečo, čo prepája energiu a entropiu.

9.4 Termodynamické rozdelenia

Základ pravdepodobnostného prístupu je predpokladať, že nič neviem – uvažujem všetky možnosti, ktoré môžu nastať, no niektorým môžem priradiť istú váhu. Priemerné hodnoty fyzikálnych veličín – ktoré očakávam pri experimente – spočítam spriemerovaním cez všetky uvažované stavy. Bežne sa objavujú tri rozdelenia, ktoré pasujú na rôzne situácie:

- **Mikrokanonické rozdelenie:** Uvažujeme všetky možné stavy systému, v ktorých má rovnakú energiu aj počet častíc. Každý stav má rovnakú štatistickú váhu. (Modeluje úplne izolovaný systém.)

- **Kanonické rozdelenie:** Uvažujeme všetky možné stavy systému, kedy má rovnaký počet častíc. Stavy s rôznou energiou majú rôznu štatistickú váhu. (Modeluje systém v tepelnom kontakte.)

- **Grandkanonické rozdelenie:** Uvažujem všetky možné stavy systému. Stavy s rôznou energiou či počtom častíc majú – pri nenulovom chemickom potenciáli – rôznu štatistickú váhu. (Modeluje systém v plnom kontakte s okolím, môžu sa presúvať častice do a z neho.)

Ako modelovať plyn častíc? Pomocou náhodného rozdelenia, ktoré mi napríklad udáva pravdepodobnosť, že bude mať častica rýchlosť $\mathbf{v}$.

- Kedy sa môžem nezaujímať o polohu častice?

Túto hustotu udáva Maxwell-Boltzmanovo rozdelenie

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right). \tag{129}$$

Prečo je to hustota? Lebo pravdepodobnosť získam vtedy, keď preintegrujem cez časť priestoru rýchlostí. Výsledkom bude pravdepodobnosť, že sa častica pohybuje rýchlosťou v danom intervale. Takže napríklad si viem spočítať, s akou pravdepodobnosťou bude letieť častica smerom k pravej stene rýchlosťou nad 200 m/s. Maxwell k tomuto rozdeleniu prišiel na základe úvah o správaní molekúl, z veľkej časti ide o takzvaný edukovaný tip. Ide o špeciálny prípad Maxwellovho rozdelenia, ktoré môžeme používať pri systéme s fixným počtom častíc, ktorý je však tepelne viazaný na okolie

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp\left(-E_i/k_B T\right) = \frac{1}{Z} \exp\left(-e_i \beta\right), \tag{130}$$

kde Z je normovacia konštanta, vďaka ktorej je celková pravdepodobnosť rovná 1. Keď chceme počítať, aká je stredná hodnota veličiny, spriemerujem ju cez všetky možnosti, cez všetky možné energetické stavy systému (niektoré energie sa môžu opakovať). Strednú hodnotu, napríklad energie, spočítame ako

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i E_i \exp\left(-E_i/k_B\right). \tag{131}$$

No a teraz sa pozrime na zdanlivo nevinne vyzerajúcu normovaciu konštantu $Z = \sum_i \exp\left(-E_i/k_B\right)$. Vyzerá podobne, ako to, čo počítame, teda stredná hodnota energie, že? Akurát sa energia nachádza len v exponente, nie pred ním. Poznáme operáciu, ktorá exponenciál nezmení, len jeho argument vytiahne von? Áno, derivácia! Platí, že

$$\langle E \rangle = -\partial_\beta \log Z. \tag{132}$$

- Vidno to?

Z sa volá partičná funkcia (suma) a nesie v sebe všetky dôležité (makro-) informácie o systéme!

V prípade mechaniky bol dôležitý pojem potenciálu. Potenciály sa dajú zadefinovať aj v prípade termodynamických objektov. Je to trochu zložitejšie v tom, že majú viacero vlastností, ktoré sa môžu a nemusia meniť. Potenciál opisuje prácu, ktorú môže systém vykonať. Dôležitý príklad je Helmholtzova voľná energia, teda práca vykonateľná pri fixnej teplote a počte častíc:

$$A = U - TS, \tag{133}$$

kde $U = \langle E \rangle$ je stredná vnútorná energia. (Mimochodom, bez dôkazu, $A = -k_B T \log Z$). Ak je systém ponechaný svojmu osudu, tak platí, že

$dA \leq 0$. Rovnovážny stav je daný podmienkou $dA = 0$, kedy je voľná energia minimálna. Ako systém minimalizuje voľnú energiu? Buď znižovaním energie alebo zvyšovaním entropie. Čo z toho je dôležitejšie? To udáva teplota! Toto je druhá z tých najlepších definícií (sú si vlastne ekvivalentné): teplota je to, čo udáva pomer medzi minimalizovaním voľnej energie a maximalizovaním entropie. Udáva balans medzi poriadkom a neporiadkom.

Príklady

- Prvé vrecko má 50 bielych a 50 čiernych guličiek, druhé má 100 bielych a 100 čiernych. Z každého môžem vytiahnuť dve, pozrieť sa a vrátiť ich späť. Opakovať to môžem koľkokrát chcem. Viem vrecká odlíšiť?
- Opitý námorník spraví náhodne krok dopredu alebo dozadu. Ako ďaleko bude po N krokoch?
- Koľko existuje rôznych prehodení písmen v slove $AUTOMATIKA$.
- Porovnajte $\log n!$ s $n(\log n - 1)$ pre $n = 2, 10, 50$.
- Máme systém 10 spinov. Porovnajte pravdepodobnosť nájsť 3 z nich hore (zbytok dole) versus pol na pol. To isté pre 20 spinov (6 hore, 14 dole vs 20 hore a 20 dole).
- Koľkými spôsobmi sa dá usporiadať balíček kariet? Koľkými spôsobmi sa dá usporiadať balíček kariet, ak ignorujem hodnoty kariet, všímam si len ich farbu? (Dokopy je 52 kariet, 13 z každej farby.)
- Kovy sa s teplotou rozťahujú. Ak máte dieru v plechu a plech sa zohreje, čo sa stane s dierkou v ňom?
- Je ľahké teplo niečomu dodať. Ako sa dá odobrať?
- Aký dizajn chladiacich boxov v obchodoch šetrí najviac energie?
- Ako fungujú sviečky a vzdušný raráškovia?
- Prečo vyparovanie ochladzuje?
- Predstavte si systém, ktorý sa môže nachádzať v stavoch s energiou $E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2)$, kde $n = 1, 2, 3, ..., \infty$. Spočítajte jeho partičnú funkciu a strednú hodnotu energie.

- Hustota pravdepodobnosti rýchlosti častice plynu pri teplote T je daná rovnicou (129). Spočítajte jej strednú hodnotu kinetickej energie (nezabúdajte, že integrujeme cez $dv_x dv_y dv_z = d^3v = 4\pi v^2 dv$, teda ideálne počítať v sférických súradniciach).
- Akú prácu vykoná plyn pri izotermickom deji ak prešiel z objemu V_1 do objemu V_2?

Projekty

(Všetky tieto projekty očakávajú, že si vyhľadáte a spracujeme k nim už známe výpočty.)

- Z opisu polymérov odvodiť Hookov zákon.
- Napísať krátky program, ktorý overí, po koľkých krokoch viem odlíšiť dve vrecia z príkladu z cvík.
- Naštudovať a vysvetliť Landauerov princíp (vymazanie bitu informácie vždy vygeneruje nejaké teplo).
- Odvodiť entropiu pre jednoatómový plyn.
- Odvodiť a overiť rovnicu pre zaprášenosť poličiek (v závislosti od ich výšky).

10 Elektromagnetizmus a optika

Elektrina a magnetizmus fascinujú ľudí od nepamäti. Starovekí Gréci vedeli, že dobre vyleštený jantár (grécky $\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$) priťahuje prach a že ruda z oblasti magnézie zas interaguje so železom. Pozrieme sa na tento fenomén na trochu úrovniach.

10.1 Elektromagnetizmus bez rovníc

V tejto časti nebudeme používať rovnice. Veci môžu mať elektrický náboj, ktorý môže mať kladné aj záporné hodnoty. Rovnaké náboje sa odpudzujú, rovnaké sa priťahujú. Elektromagnetická sila klesá so vzdialenosťou podobne (dokonca rovnako) ako gravitačná sila.

- Aké sú rozdiely medzi gravitačnou a Coulombovou elektrickou silou?

V atómoch nie je náboj rozdelený rovnomerne, kladný je koncentrovaný v jadrách, záporný je rozptýlený v elektrónovom obale; môže sa však uvoľniť a preskočiť k inému atómu alebo do priestoru. Tým pádom sa neutrálne častice môžu stať nabitými. A aj v celkovo neutrálnej hmote môže dochádzať k pohybu náboja.

Pohyb elektrického náboja voláme elektrický prúd. Poháňa ho istá forma nerovnováhy, ktorú sa náboj svojím premiestnením snaží znovunastoliť [21]. Túto nerovnováhu charakterizuje napätie. Cez niektoré médiá sa náboj pohybuje ľahko, cez niektoré ťažšie, toto charakterizuje vodivosť respektíve odpor média. Medzi prúdom, napätím a odporom existuje jasný vzťah. Počas pohybu náboja dochádza k interakciu s vodivým médiom, čo sa prejavuje ako teplo.

Statický a pohybujúci sa náboj vytvára elektrické a magnetické polia. Zároveň elektrické a magnetické polia vplývajú na elektrický náboj. Prúd tak vie vytvárať polia a polia prúd. Toto je základ generátorov elektrického prúdu, elektromotorov či rádiovej komunikácie.

Plyn okolo nás je za bežných podmienok neutrálny. Niekedy však môže dochádzať k oddeleniu elektrónov (takzvaná ionizácia), príčinou môže byť napríklad teplota alebo silné elektrické napätie. V druhom prípade dochádza k pohybu jadier jedným smerom a elektrónov opačným, dochádza k ďalším

[21] Le Chatelierov princíp hovorí, že ak máme systém v rovnováhe a niečo ho vychýli jedným smerom, vzniknú sily, ktoré budú pôsobiť opačne. Čo nám to pripomína?

kolíziám a ďalej ionizácii. Výsledok je kaskádový efekt, počas ktorého je ionizovaná veľká časť plynu, ten začne viesť elektrický prúd. Výrazne sa zohrieva (tým pádom žiari) a vydáva zvuk (kvôli vibráciám plynu). Toto sa v malej mierke volá iskra a vo veľkom blesk.

10.2 Elektromagnetizmus s rovnicami

10.2.1 Coulombov zákon

Coulumbov zákon opisuje priťahovanie alebo odpudzovanie elektrických nábojov

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ\mathbf{r}}{r^3}, \tag{134}$$

pričom typicky namiesto sily rozprávame o poli definovanom vzťahom $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. To na prvú pôsobí ako drobná substitúcia, no má to hlboké fyzikálne implikácie. V reči síl hovoríme, že jeden náboj pôsobí na druhý. No v reči polí hovoríme, že prvý náboj vytvára pole, ktoré pôsobí na druhý náboj. Do hry sa dostáva nový hráč [22] – pole – o ktorom sa dozvieme, že nie je len pomocnou veličinou, ale samostatnou entitou s vlastnými pohybovými zákonmi.

- Ako zadefinovať elektromagnetický potenciál? Dá sa to?
- Kde sme už niečo podobné videli?

Súvis elektrického poľa a elektrického potenciálu je daný cez gradient:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \tag{135}$$

Pomocou Gaussovho zákona (tok cez plochu) vieme Coulombov zákon upraviť na tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{136}$$

kde ε_0 je permitivita vákua. Ak spojíme predošlé dve rovnice, dostaneme Poissonovu (respektíve Laplacovu, ak $\rho = 0$) rovnicu

$$\Delta\Phi = -\rho/\varepsilon_0. \tag{137}$$

V elektrostatike riešime ako úlohu hľadanie potenciálu Φ pri daných okrajových podmienkach (napríklad nulový potenciál v prípade uzemnenia). Na hranici vodivých objektov musí byť potenciál konštantný.

[22] O poliach sa vedelo už aj v kontexte gravitácie. Podobnosť týchto teórií bola inšpiráciou pre mnohé hypotézy, napríklad existenciu gravitačných vĺn.

- Prečo?

Na chvíľu sa vžime do 1D priestoru, ako tam vyzerá operátor Δ? Prvá derivácia je (približne) $\partial_x \Phi(x) \approx \frac{\Phi(x+\epsilon/2)-\Phi(x-\epsilon/2)}{\epsilon}$. Takže druhá derivácia je $\partial_x^2 \Phi(x) \approx \frac{\Phi(x+\epsilon)+\Phi(x-\epsilon)-2\Phi(x)}{\epsilon^2}$. V tomto prípade sa vieme na Poissonovu rovnicu pozrieť ako

$$\begin{aligned} -\rho(x)/\varepsilon_0 &= \frac{\Phi(x+\epsilon)+\Phi(x-\epsilon)-2\Phi(x)}{\epsilon^2} \\ &\leftrightarrow \\ \Phi(x) &= \frac{\rho(x)\epsilon^2/\varepsilon_0+\Phi(x+\epsilon)+\Phi(x-\epsilon)}{2}. \end{aligned} \tag{138}$$

Čiže slovami: hodnota potenciálu v danom bode závisí od náboja v danom bode a priemeru potenciálu v susedných bodoch.

- Robil niečo podobné laplacián aj vo vlnovej rovnici?

- Navrhnite numerickú metódu riešenia Laplacovej úlohy s okrajovými podmienkami $\Phi(0\ m) = 0\ V$ a $\Phi(1\ m) = 1\ V$.

10.2.2 Ampérov zákon

Ampérov zákon nám udáva súvis medzi prúdom vo vodiči a magnetickým polom v jeho okolí. Je daný ako

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \tag{139}$$

kde μ_0 je permeabilita vákua. Vo všeobecnosti sa z tohto ťahá riešenie (pre $\mathbf{B}$) priamočiaro ale ťažko. Ak však prúd tečenie nekonečne dlhým rovným drôtom, úloha má symetrie, ktoré môžeme využiť.

- Ako?

- Kde sa v tomto nachádza pravidlo pravej ruky?

Ampérov zákon vieme upraviť (cez Stokesovu vetu) na tvar

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{140}$$

kde $\mathbf{J}$ je prúdová hustota, teda koľko prúdu preteká cez jednotku plochy.

10.2.3 Lorentzova sila

Stojaci a pohybujúci sa náboj produkujú elektromagnetické polia. Elektromagnetické polia zas vplývajú na elektrický náboj. Túto interakciu opisuje Lorentzova sila

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{141}$$

Prvý člen je pomerne známy, druhý je zaujímavý. Po prvé, závisí od rýchlosti objektu, po druhé, sila je kolmá na smer pôsobiaceho magnetického poľa.

- Prediskutujte, ako môžeme pomocou takejto sily a nastaviteľných magnetických polí vytvoriť „rýchlostný filter“ na častice.
- Aké magnetické pole treba na to, aby častica išla po kružnici? Aký veľký kruh to bude?
- Ako identifikovať častice pomocou ich trajektórií?

10.3 Maxwellove rovnice

Doterajšie rovnice obsahovali isté zjednodušenia, napríklad boli statické. Elektromagnetické rovnice v plnej sile popísal James C. Maxwell. Dovtedy si ľudia mysleli, že študujú elektrinu a magnetizmus. On tieto oblasti zjednotil do jedného celku – elektromagnetizmu. Je popísaný štyrmi rovnicami:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{p\mathbf{E}}{\partial t}. \right) \end{aligned} \tag{142}$$

Prvý riadok je známy Gaussov zákon súvisiaci s Coulombovou silou. Druhý zákon hovorí, že neexistuje magnetický monopól, zdroj magnetické poľa z ktorého by vyvierali magnetické polia [23]. Tretí zákon je Faradayov zákon magnetickej indukcie. Posledný zákon je Ampérov zákon obohatený o nový člen, ktorý Maxwell pridal kvôli matematickej konzistentnosti rovníc, volá sa Maxwellov posuvný prúd.

[23]Prvá rovnica teda vlastne hovorí, že existujú elektrické monopóly, zdroje elektrického poľa.

- Všimnite si, že rovnice vyzerajú tak trochu symetricky, až na to, že nemáme zdroj magnetického poľa. Niektorí ľudia si myslia, že možno existuje a tak usilovne ho hľadali. Ako by sa existencia magnetických monopólov prejavila?

- Nezískam magnetický monopól jednoducho prepolením magnetu?

Spojiť elektrinu a magnetizmus by bol sám o sebe fenomenálny úspech. Tam však Maxwell neskončil. Manipuloval sa so svojimi rovnicami a zistil, že sa dajú spojiť na tvar vlnovej rovnice

$$\begin{aligned} \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{E} &= 0, \\ \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{143}$$

Pripomeňme si, že vlnová rovnica má tvar $c^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$. Tým pádom sa dá z Maxwellových rovníc vyčítať rýchlosť elektromagnetického vlnenia, $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$. Výsledok je okolo $300000 km/s$. Záver je prostý – svetlo je elektromagnetické vlnenie [24]

10.4 Čo je to svetlo?

Svetlo je jedným z fyzikálnych aspektov s ktorými máme najbohatšie skúsenosti. Dnes už vieme, že svetlo je elektromagnetické vlnenie, ktoré s hmotou na mikroskopickej úrovni interaguje vo forme fotónov. K týmto aspektom svetla sa ešte vrátime v časti o kvantovej mechanike. Teraz sa pozrieme na základy optiky.

10.5 Lom svetla

Jeden z užitočných (aj keď nie dokonale presných) opisov svetla je, že sa šíri vo forme lúčov. Rýchlosť šírenia svetla závisí od prostredia.

- Ako sa prvýkrát podarila zmerať rýchlosť svetla?

Keď sa svetlo dostane na rozhranie dvoch prostredí, časť z neho sa zlomí a časť sa odrazí.

[24] Historicky to bolo trochu menej prosté, lebo ani permitivita a permeabilita vákua a ani rýchlosť svetla vo vákuu neboli určené tak presne, ako sú dnes. Ale aj vtedy to na správny záver stačilo.

- Ako funguje fyzika falošných zrkadiel vo vypočúvacích miestnostiach?

Uhol odrazu sa riadi jednoduchým zákonom: uhol odrazu sa rovná uhlu dopadu.

- Prečo?

S lomom svetla je to zložitejšie, riadi sa Snellovým zákonom

$$\sin\theta_i n_i = \sin\theta_f n_f, \tag{144}$$

kde n_i sú príslušné indexy lomu. Zákon nesie meno po Willebrordovi Snelliusovi zo 16. storočia, svoj výsledok nepublikoval. Výsledok zopakovali aj veľké mená ako Fermat, Descartes či Huygens. Všetkých ich však trhol v roku 984 Perský učenec Ibn Sahl.

Ako tento výsledok odvodili? Rôzne. Jedno (modernejšie) vysvetlenie je cez vlnovú povahu svetla – na oboch stranách rozhrania platia Maxwellove rovnice s rôznymi parametrami a na rozhraní chceme, aby vlny pasovali dokopy – chceme, aby boli vlnoplochy celistvé.

- Nakreslite si to.

Druhé je cez princíp najmenšieho času.

- Čo hovorí Fermatov princíp? Kde sme už niečo podobné videli?

Pomocou lomu svetla odhalil Newton niečo fascinujúce. Slnečné (biele) svetlo obsahuje všetky farby dúhy! Dá sa rozložiť a znovu zložiť.

- Ako je to možné?

- Čo je to spektrum elektromagnetického vlnenia?

Analýzou rozkladu slnečného svetla si Frauhofer všimol niečo zaujímavé. Niektoré farby chýbajú. Začal ich veľmi presne merať a katalogizovať. Ich pôvod nebol známy. O nejaký čas neskôr si ľudia všimli, že keď preženú svetlo plynom nejakého prvku, vzniknú podobné štrbiny.

- Čo je to emisia a absorbcia svetla, ako prebieha?

Ľuďom pomerne rýchlo doplo, že chýbajúce čiary v slnečnom svetle odpovedajú chemickému zloženia Slnka (a našej atmosféry) a tak sme zistili, z čoho sa skladá Slnko. Jeden prvok však bol neznámy a tak dostal nové meno odpovedajúce tomu, že bol objavený práve na Slnku – hélium.

- Ako sa dá svetlo využiť na skúmanie vzdialených planét?

10.6 Rozlišovacie limity

Predstavte si dva zdroje svetla vzdialené L od seba. Vlnová dĺžka svetla je λ a ich vzdialenosť je R. Dokážeme tieto dva body od seba rozlíšiť? Alebo sa javia len ako jeden zdroj? Presný mechanizmus je pomerne zložitý. Približný výsledok sa dá ale odhadnúť na prstoch. Uhol, ktorý z nášho pohľadu zvierajú dva body je $\theta \approx L/R$. Chceme, aby sa svetlo (napríklad pri pravouhlom trojuholníku) líšilo o rádovo vlnovú dĺžku. Z toho máme $\sqrt{R^2 + L^2} - R = \frac{1}{2}\frac{L^2}{R} + ... \approx \lambda$. Dokopy máme ako odhad rozlišovacej schopnosti

$$\theta \approx \frac{\lambda}{L}. \tag{145}$$

(Presnejší výraz je $\theta = 1.22\frac{\lambda}{L}$.)

10.7 Farba

Fyzika nepozná farby, pozná vlnové dĺžky svetla a im odpovedajúce energie. Ako vzniká vnem farby? Ľudské okolo obsahuje tri typy farbocitlivých čapíkov. Ich základom sú proteíny, ktoré s istou pravdepodobnosťou zachytia prichádzajúce svetlo a zmenia ho na signál, ktorý smeruje do mozgu. Tento signál mozog interpretuje ako farbu.

Citlivosť čapíkov na farby nie je exaktná, každý je citlivý na istý rozsah vlnových dĺžok. Kým napríklad svetlo s vlnovou dĺžkou 400 nm excituje iba modré čapíky, svetlo okolo 500 nm excituje zelené aj červené čapíky. Z pomeru týchto signálov mozog určuje farbu svetla (respektíve vytvára ich interpretáciu), z ich absolútneho množstva určuje celkový jas.

- Koľko druhov zdrojov jednofarebného svetla potrebujeme na dokonalé oklamanie zraku?

Príklady

- Ako vedeli ľudia v Maxwellových časoch určiť rýchlosť svetla? Navrhnite pokus, ktorý by nebol úplne na smiech.

- Ak máme konštantné magnetické pole a časticu, ktorá letí kolmo na neho, začne sa pohybovať po kružnici. Aká veľká táto kružnica bude? (Návod: rovnosť odstredivej a dostredivej (magnetickej) sily.)

- Máme elektrické pole **E**, na neho kolmé magnetické pole **B**. Ako sa častica musí pohybovať, aby letela rovno bez zrýchlenia (sily na ňu sa vyrušia).
- Odvodiť vlnovú rovnicu pre **E** alebo **B** z Maxwellových rovníc (návod, spraviť rotáciu jednej z rovníc).
- Opíšte, čo najpodrobnejšie, ako funguje fatamorgána.
- Aký najmenší objekt dokážeme vidieť voľným okom?
- Ak má teleso teplotu T, žiari na jednotku plochy, podľa Stefan-Boltzmannovho zákona, energiu $e = \sigma T^4$, kde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$. Koľko energie práve žiarite?
- Spočítajte uhol pre dúhu.
- Aký veľký tanier satelitu potrebujeme, ak chceme odfotiť supermasívnu čiernu dieru o priemere 10^9 kilometrov na vzdialenosť 54 MLy pri vlnovej dĺžke 1 mm?

Projekty

- Numerické riešenie Poissonovej rovnice v 2D.
- Blesky a iskry (spracovať ako tému).
- Hydraulická analógia (s elektrickými obvodmi).
- Rýchlosť svetla v mikrovlnke.
- Spracovať Maxwellovo „objavenie svetla“ (prejsť cez výpočet poriadne a doplniť o historické aspekty).
- Ako sa kedysi merala rýchlosť svetla?
- Odvodiť Planckov vyžarovací zákon.
- Numericky uchopiť fatamorgánu. (Nad horúcou cestou postupne klesá teplota od ktorej závisí index lomu svetla. Modelovať situáciu ako na seba naukladané tenké vrstvy vzduchu, pričom prichádzajúce svetlo sa na každom prechode zalomí a ak dopadá pod dosť malým uhlom, tak sa odrazí. Ako vyzerá dráha svetla?)

- Spočítať geometriu dúhy.

11 Teória relativity

V našom fyzikálnom putovaní nastáva zlom. Doteraz sme sa rozprávali o fyzike, ako ju ľudia poznali začiatkom 20. storočia. Všetko dávalo zmysel, teda až na pár detailov a boli ľudia, čo si mysleli, že fyzika je takmer hotová, už budeme len spresňovať. Potom sa však ukázalo, že vyriešenie tých detailov otvorilo brány do nových svetov, ktoré nemáme prebádané dodnes. V dvoch posledných častiach sa pozrieme na teóriu relativity a kvantovú fyziku. Obe tieto oblasti sú hodné samostatných učebníc, samozrejme ich nebudeme preberať podrobne. Našim hlavným cieľom bude vybrať niekoľko esenciálnych prvkov z oboch teórií a porovnať ich s poznatkami z klasickej mechaniky, ktorú sme študovali doteraz.

11.1 Špeciálna teória relativity

Takže v skratke: so svetlom bol problém. Ukázalo sa, že je elektromagnetickou vlnou a tak prišla prirodzená otázka, čo sa vlastne vlní? Médium, ktorého vibrácie mali byť svetlom, sa nazvalo éter. Roky snáh zmerať našu rýchlosť voči éteru dávali výsledok, ktorý bol konzistentný s nulou. Javilo sa, že voči éteru stojíme, nech už sa pohybujeme akokoľvek.

- Ako sa mení rýchlosť laboratória počas dňa? (Voči čomu?)
- Ako sa mení rýchlosť Zeme počas roka?
- Ako sa mení rýchlosť Slnka počas galaktického roka?

Teória nám zároveň ukázala, že rýchlosť svetla vyplýva z fyzikálnych zákonov a tie by mali platiť pre všetkých rovnako. To viedlo k zvláštnemu problému, ak sa voči sebe pohybujú dvaja pozorovatelia vo vákuu, ktorý z nich vidí svetlo letieť rýchlosťou svetla? Albert Einstein prišiel s geniálnou myšlienkou: obaja.

- Čo je to Michelson–Morleyho experiment?

Jeho nápad nevzišiel len tak z vákua, predchádzali mu iné teoretické práce, ktoré naznačili, ako ďalej. Tie napríklad skúmali, že ak sa pozorovateľ voči elektrického náboju pohybuje, vníma jeho polia mierne deformované.

Experimenty teda nevedeli dokázať pohyb voči éteru, teória naznačovala – zatiaľ na úrovni matematickej finty [25], že dochádza k deformácií dĺžok a dokonca sa v rovniciach objavovalo niečo, čo vyzeralo ako inak plynúci čas. Znova len na úrovni finty, ktorá opravuje výsledky.

Albert Einstein si uvedomil, že sú to viac, než len finty. V skratke: éter neexistuje, svetlo sa pohybuje rýchlosťou svetla z pohľadu každého pozorovateľa vo vákuu a dôvod, prečo je to možné aj ak sa pozorovatelia voči sebe pohybujú je taký, že sa mení ich vzájomné vnímanie času a priestoru.

- Čo je to čas?

Čas je to, čo merajú hodiny. Hodiny sa dajú postaviť všelijako, medzi sebou by však mali byť konzistentné. Zoberme si jednoduchý model hodín: svetlo sa odráža medzi dvomi zrkadlami vo vzdialenosti L, vzdialenosť tam a späť preletí za čas $T = 2L/c$.

Predstavme si, že svetlo letí v horizontálnej rovine a hodiny sa začnú pohybovať vertikálne.

- Nakreslite si dráhu svetla v takom prípade.

Z pohľadu systému, voči ktorému sa hodiny hýbu, preletí svetlo väčšiu vzdialenosť $2D$, kde ...

- Spočítajte D.

... $D = \sqrt{\frac{T'v}{2} + L^2}$ a $T' = 2D/c$ je čas z pohľadu stojacej sústavy. Ak sa teraz zbavíme dĺžok, tak dostaneme vzťah medzi tikaniami hodín:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma T. \tag{146}$$

Tá $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ je v teórií relativity tak všadeprítomná, že dostala označenie γ, občas ju voláme gama faktor.

- Aké hodnoty môže nadobúdať?

[25] Mnohé veľké objavy vo fyzike začali najprv ako matematické finty, ktoré sa však, ako sa ukázalo neskôr, mali v sebe ukryté niečo hlboké.

Ak prijemne túto skutočnosť – teda, že čas plynie z pohľadu voči sebe sa pohybujúcich pozorovateľov inak – tak sa začne meniť všetko ostatné. Napríklad, ak sa zhodneme na rýchlosti svetla a nezhodneme na meraní času, tak sa nemôžeme zhodnúť ani na meraní dĺžky.

- Prečo?

Pre kontrakciu dĺžok teda platí podobný vzťah:

$$l' = \gamma^{-1} l. \tag{147}$$

- V ktorom smere sa deje kontrakcia dĺžok?
- V horných vrstvách atmosféry vznikajú krátko-existujúce častice (mióny), ktoré by nedorazili na povrch nebyť dilatácie času. Ako vyzerá situácia z ich pohľadu?

Bez dôkazu, niečo podobné sa deje pri hmotnosti – dôležité je to napríklad v časticových urýchľovačoch. Ak urýchlime časticu s pokojovou hmotnosťou m_0 na rýchlosť v, má z nášho pohľadu hmotnosť $m = \gamma m_0$.

- Prečo je z tohto pohľadu nemožné prekročiť rýchlosť svetla?

Nebudeme zachádzať do hĺbok, tak ešte jeden dôležitý bod – relativita súčasnosti. V Newtonoveskej fyzike sa všetko vo vesmíre v tom istom čase deje naraz. V teórií relativity je *naraz* subjektívny pojem. A to, čo sa z pohľadu jedného pozorovateľa stalo naraz, sa z pohľadu iného udialo postupne. Predstavte si, že vlak prechádza stanicou a zrazu sa pustia dve lampy. Človek, ktorý stojí medzi nimi ich uvidí bliknúť naraz. Čo človek vo vlaku?

- Dá sa zhodnúť na tom, čo je minulosť a čo budúcnosť? (Odpoveď: Čiastočne.)

Teraz si, tiež len letmo, naznačíme matematický formalizmus, ktorý sa v špeciálnej teórií relativity využíva.

Časopriestor: Na to, aby sa dve častice stretli a napríklad zrazili, musia sa stretnúť na tom istom mieste a v tom istom čase. Vo fyzike tak používame čas a priestor na opis dynamiky pomerne dlho ...

- Uveďte príklady nejakej $f(\mathbf{r}, t)$.

... a tak je pojem časopriestoru v niečom veľmi prirodzený a priamočiary. Polohu v ňom zadávame pomocou štyroch čísiel: (t, x, y, z), hovoríme časopriestorové súradnice, bodu v časopriestore občas hovoríme *udalosť*. To znamená, že aj všetky užitočné vektory z bežnej fyziky sa musia stať štvorvektormi. Práve to, ako sa rôzne veci (napríklad energia a hybnosť) spájajú do štvorvektorov tvorí veľkú časť esencie relativity.

Pre každú udalosť existuje v časospriestore významná plocha, takzvaný svetelný kužeľ. Vzniká ako trajektória svetla, ktoré prišlo/odišlo do daného bodu v danom momente. Udalosti, ktoré ležia vo vnútri svetelného kužeľa môžu mať na udalosť kauzálny vplyv (a naopak, podľa toho, o ktorú časť kužeľa ide) a voláme ich časupodobné. Tie mimo neho voláme priestorupodobné. Tie na hranici sa volajú svetlupodobné.

- Nakreslite si svetelný kužeľ a spomínanú štruktúru.

Síce sa rôzni pozorovatelia nezhodnú na plynutí času a meraní dĺžok, no zhodnú sa na tom, čo leží vnútri a čo mimo svetelných kužeľov. To znie možno ako geometrická banálnosť, no súvisí to s hlbokým princípom: relativita nenarúša princíp kauzálnosti – a to aj keď dokáže meniť vnímanie súčasnosti.

- Nakreslite si súčasnosť do časopriestorového intervalu.

Lorentzovské transformácie:

V obyčajnom, Euklidovskom, priestore sme mali vektory (x, y, z). Z pohľadu pozorovateľa, ktorý je voči nám otočený, má ten istý bode iné súradnice, (x', y', z'), no jedna vec sa nemení – po otočení je bod rovnako ďaleko od počiatku:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{148}$$

Inými slovami, pri otočení sa nemenia dĺžky, len ich natočenia. Posúvanie a otáčanie vecí je v trojrozmernom priestore úplne samozrejmá a základná vec, vychádza z toho, že priestore nemá význačný bod či smer.

Ako taký priestor vzniká? Môžeme postupovať takto. Krok jedna, prehlásime, že máme priestor, teda usporiadanú množinu trojíc bodov (x, y, z) [26]. Krok číslo dva, tento priestor vybavíme konceptom vzdialenosti (v Euklidovskom priestore definovanej cez Pytagorovu vetu).

[26]Táto definácia má štipku fyzikálnej ležérnosti.

- Vymyslíte príklad priestoru bez vzdialeností?

Matematicky sa tento konštrukt volá metrika – postup, ako merať vzdialenosti medzi bodmi.

- Aké vlastnosti by mala spĺňať metrika?

Keď máme tento metrický priestor, tak si môžeme položiť otázku – čo s ním môžeme robiť, aby sa metrika nemenila? Zistíme, že dve veci: translácie a rotácie. Rotácia a translácia sú transformácie, ktoré zachovávajú dĺžky (a dĺžka je to, čo robí z matematickej abstrakcie fyzikálne užitočný priestor).

Ako by vyzeralo toto isté v časopriestore? Krok číslo jedna je takmer identický, časopriestor je (usporiadaná) množina štvoríc (t, x, y, z). Krok číslo dva je iný, dĺžka ako taká nemá fyzikálny význam. Čím Einstein celú relativitu naštartoval? Požiadavkou, aby rôzni pozorovatelia videli rovnakú rýchlosť svetla. Z pohľadu jedného pozorovateľa sa za čas dt posunie svetlo o (dx, dy, dz), pričom platí $c^2dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

- Je jasné, že prečo?

- Prečo sme pridali tú rýchlosť svetla?

Alebo inak: $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 = 0$. Iný pozorovateľ vidí iné (dt', dx', dy', dz'), ale stále platí $c^2dt'^2-dx'^2-dy'^2-dz'^2 = 0$. Ak sa častica pohybuje pomalšie, tak platí

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 > 0. \tag{149}$$

Veličina ds sa volá časopriestorový interval, rozdielni pozorovatelia sa zhodnú na jeho dĺžke

$$ds^2 = ds'^2, \tag{150}$$

a teda to, že sa zhodnú na rýchlosti svetla je špeciálny prípad pre $ds'^2 = 0$. Časopriestorový interval je časopriestorovou náhradou za dĺžku. Jeho špecialitou je, že sa na ňom zhodnú rôzni pozorovatelia. No a teraz môžeme spraviť ďalší krok, ten bude vyzerať rovnako. Čo môžeme robiť s časopriestorom tak, aby sa táto významná štruktúra nemenila?

- Ukážte, že translácie a rotácie sú stále dobré.

Pribúda možnosť Lorentzovských transformácií, ktoré voláme aj *boosty* – ide o prechod medzi sústavami pozorovateľov, ktorí sa vzhľadom na seba pohybujú. Nie je to nič zvláštne, už sme na to narazili – sú to dilatácie času a kontrakcie dĺžok. Ako matice vyzerajú (pre pozorovateľa pohybujúceho sa smerom x) ako:

$$(ct', x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta & 0 & 0 \\ \sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (ct, x, y, z)^T . \tag{151}$$

- Čo vám to pripomína?
- Aký vzťah prepája cosh a sinh?

Parameter ζ sa nazýva rapidita.

- Ako súvisí s γ?

Rozdiel medzi Euklidovskou geometriou a Minkowského geometriou časopriestoru vychádza z jedného rozdielneho mínuska.

- časopriestorový interval sme mohli mať zadefinovaný aj ako $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$. Ide iba o konvenciu. Zmenilo by to niečo? Prečo?

Rotácie otáčajú body v priestore po kružniciach, boosty body v časopriestore po hyperbolách. Hyperboly majú niektoré čiary, pri ktorých sa pri posunutí nič nemení – to sú práve rovné čiary, ktoré predstavujú trajektórie svetla; preto sa na jeho rýchlosti zhodnú rôzny pozorovatelia.

Túto teóriu, ktorá popisuje vnímanie fyzikálnych zákonov z pohľadu rôznych pozorovateľov pohybujúcich sa prázdnym časopriestorom, voláme špeciálna teória relativity. Trochu sme načrtli jej základné vlastnosti: relativitu súčasnosti, dilatáciu času, kontrakciu dĺžok, Lorentzove transformácie. Niektoré vlastnosti teória obsahuje, ale my sme na ne nedočiahli – napríklad súvis medzi hmotou a energiou, na ktorý by sme potrebovali presnejšie základy relativistickej kinematiky. Na pozadí toho všetkého bola absolútna rýchlosť svetla, ktorá sa prejavila jedným (respektíve tromi) zvláštnym znamienkom v časopriestorovej Pytagorovej vete. Čím je však špeciálna teória relativity špeciálna? Tým, že neobsahuje gravitáciu.[27] Mimochodom, všimnite si, že v limite $c \to 0$ výsledky reprodukujú klasickú mechaniku.

[27]Iné sily, napríklad elektromagnetická, sa v relativistickej reči formulovali prirodzene. Silná a slabá jadrová si však museli počkať na rozvoj kvantovej fyziky.

11.2 Všeobecná teória relativity

Einsteinovi bolo jasné, že jeho novej teórii niečo chýba. Z pohľadu Newtonovej teórie mala gravitácia pôsobiť okamžite. To znamená, že ak by zmizlo Slnko, Zem by okamžite pokračovala po rovnej čiare. To je zvláštne, lebo svetlo – a ľubovoľný iný signál – zo Slnka cestuje vyše 8 minút. Einstein dostal šťastný nápad, predstavu padajúceho človeka vo výťahu. Uvedomil si, že gravitácia sa správa prekvapivo podobne ako zotrvačná sila. Napadlo ho, že gravitačnú silu vnímame ako dôsledok zotrvačnej sily v časopriestore. Najprv prezradíme záver a potom sa zastavíme pri výraznom medzikroku k nemu. Jeho teória sa dá zhrnúť do jednej vety: hmota vraví časopriestoru, ako sa má zakriviť; časopriestor vraví hmote, ako sa má hýbať. Einstein mal tak trochu šťastie, že sa tesne pred jeho snažením v matematike začala skúmať geometria neeuklidovských priestorov. Jemu potom stačilo *len* aparát natiahnuť na časopriestor a v podstate uhádnuť dynamické rovnice.

V rovine používame súradnice (x, y) a keď v nich spravím malý krok, celkovo prejdem vzdialenosť

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (dx, dy)^T = \mathbf{ds}\ g\ \mathbf{ds}^T. \tag{152}$$

Toto vyzerá ako prehnane zložitý spôsob ako zapísať Pytagorovu vetu pomocou matice, g, ktorú voláme metrický tenzor. Metrický kvôli tomu, že slúži na meranie vzdialenosti a tenzor kvôli tomu, že je to matica, ktorá spĺňa isté vlastnosti[28]. V našom prípade je g len veľmi jednoduchá jednotková matica, v definícií skalárneho súčinu bol ukrytý, ale pochopiteľne sme si ho ani nevšimli. Čo ak by sme tam mali niečo iné?

- Aké axiómy má klasická, teda Euklidovská, geometria?
- Ktorý z nich je problematický?

S neeuklidovskou geometriou máme skúsenosti – žijeme predsa na sfére.

- Čo sa deje inak na sfére ako na ploche? (Premyslieť ako sa správajú kružnice a trojuholníky.)

[28] Vo všeobecnosti je tenzor viaczložkový objekt, ktorý spája prvky vektorového priestoru. Asi sa tým teraz netreba veľmi trápiť.

Súradnice na sfére používame napríklad uhly θ, φ. Ak sa v nich pohnem a o malý kúsok, prejdem celkovú vzdialenosť danú rovnicou:

$$ds^2 = r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{153}$$

- Prečo je tam r a $\sin\theta$?
- Kde na sfére je najľahšie sa posunúť o $d\varphi$?

Je fascinujúce, ako dlho trvalo ľudstvu objaviť príklad neeuklidovskej geometrie, keď na jednej takej žijeme. Na sfére platí nielen iná Pytagorova veta, ale dokonca sa Pytagorova veta mení od miesta k miestu!

To, že Pytagorova veta – alebo teda metrika – vyzerá inak ešte neznamená, že sa tam deje niečo zvláštne. Zoberme si iný príklad, v obyčajnej rovine použijeme polárne súradnice.

- Ako vyzerá metrika v nich?

Na prvý pohľad z metriky nie je jasné, či opisuje plochý alebo krivý priestor. Existujú však objekty, ktoré nám to prezradia, napríklad skalárna krivosť $R(g)$. Nebudeme sa do toho púšťať, je to dosť matematiky, no vedzte, že je to priamočiare. Keď dostanete zadaný priestor a jeho metriku, viete spočítať, na čom ste.

Ako vyzerá Pytagorova veta v časopriestore? V podstate veľmi podobne, až na jedno kľúčové mínus. Takže je to matica v tvare $g = \text{diag}\ (-c^2, 1, 1, 1)$. Hovoríme, že ma signatúru $(1, 3)$, teda jedno mínus a tri plus.

Jeden dôležitý pojem, ktorý si treba vyjasniť pre zakrivené priestory je, že čo vlastne nahradí rovnú čiaru?

- Ako by ste univerzálne zadefinovali rovnú čiaru?

Intuitívna predstava je taká, že po rovnej čiare idem autom vtedy, keď netočím volantom.

- Akú krivku to robí na sfére?

Takáto zovšeobecnenie rovnej čiary sa volá geodetika.

- Rovnobežníky a poludníky sú geodetiky?

Einstein si uvedomil niečo kľúčové – gravitácia sa podobá na zrýchlenie.

- Čo cítite vo výťahu, keď sa rozbieha hore či dole?

Zároveň mal silnú indíciu, že pre jeho potreby bude dôležitý koncept zakrivených priestorov. Prečo? Keď ste v zakrivenom priestore, medzi polomerom a obvodom neplatí klasický vzťah $2\pi r$. Ako máte v relativite disk, ktorý rotuje, jeho okraj sa voči stredu pohybuje istou rýchlosťou a tak cíti efekt relativistickej kontrakcie – a teda medzi obvodom a priemerom kruhu tiež nebude platiť klasický vzťah.

Tieto indície spojené dokopy viedli na záver, že gravitácia sa bude dať opísať cez formalizmus zakriveného časopriestoru. Zakrivený priestor a časopriestor sme si predstavili zvlášť, tak sa asi dá trochu vytušiť, čo vznikne z ich spojenia. Technické detaily by sa však vyžadovali dosť času. Metrika zakriveného časopriestoru je opísaná pomocou metrického tenzora g, ktorý má podobne ako v plochom časopriestore signatúru $(1, 3)$, no na rozdiel od plochého priestoru sa od bodu k bodu mení a má nenulovú krivosť. Všetko čaro sa tak deje pridaním dvoch ingrediencií – krivosti a mínusového znamienka v metrike.

Ak na nás nepôsobia žiadne sily (elektromagnetické či jadrové), tak sa v zakrivenom časopriestore pohybujeme po geodetike. Z pohľadu trojrozmerného priestoru však tento pohyb vyzerá ako napríklad voľný pád (po parabole) či eliptický obeh. Čo spôsobuje zakrivenie časopriestoru? Hmota a energia.

Einsteinovu teóriu gravitácie krásne zhrnul J. A. Wheeler: Hmota hovorí priestoru, ako sa kriviť, priestor hovorí hmote ako sa hýbať [29].

Rovnice Einstein po pár pokusoch a omyloch uhádol. Vedel, že jeho teória gravitácie musí v istej limite viesť na Newtonovskú teóriu a zároveň ho zväzovali isté matematické požiadavky.

- O akú limitu ide?

Jeho rovnice vyzerajú takto:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{154}$$

Hovorím rovnice, lebo ich je vlastne 16 – kvôli symetriám je ich nezávislých 10 –, grécke písmená indexujú časopriestorové súradnice. Na ľavej strane sa

[29] Ak chcete, aby sa to rýmovalo ako v originálnej verzii, nahraďte posledné slovo s „hmýriť".

nachádzajú členy, ktoré opisujú priestor a jeho krivosť (dokopy sa to volá Einstienov tenzor, $G(g)$), na pravej strane máme tenzor energie-hybnosti a gravitačnú konštantu.

Ak dostaneme zadané, že aké je rozloženie hmoty a energie v priestore a ako sa hýbu, vieme napísať rovnice pre g, ktoré ak vyriešime, vieme o priestore všetko, čo potrebujeme. Napríklad v ňom vieme hľadať geodetiky, teda trajektórie, na ktoré nepôsobí žiadna sila (elektrická či jadrová). Gravitácia je teda len prejavom pohybu v zakrivenom časopriestore.

Všeobecná teória relativity má nevídané dôsledky, ktoré spomenieme len heslovite:

1. Gravitačná dilatácia času.
2. Precesia perihélia planét.
3. Ohyb svetelných lúčov.
4. Strhávanie inerciálnych sústav.
5. Gravitačné vlny.
6. Rozpínanie vesmíru.

Pri jednom sa na chvíľu pristavíme, aby sme si ukázali aspoň jedno riešenie Einsteinových rovníc, asi to najslávnejšie. Karl Schwarschild hľadal vákuové riešenie Einsteinových rovníc, teda také, v ktorom je pravá strana nulová. Teda, nie úplne všade, len takmer všade – okrem počiatku súradnicovej sústavy. Opisuje to teda gravitačnú deformáciu okolo hmotného bodu. To sa typicky používa na opis gravitačného vplyvu veľkých objektov (ako hviezdy či planéty) mimo nich, vo vnútri treba použiť iné riešenie. Vyzerá, v sférických súradniciach, takto

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad (155)$$

kde $r_s = \frac{2\kappa M}{c^2}$ je takzvaný Schwarzschildov polomer. Napríklad pre naše Slnko to vychádza $r_s \approx 3\ km$. Keďže ide len o vákuové riešenie, môžeme ho používať len mimo Slnka. Z neho sa dá odvodiť Newtonov zákon gravitácie. Faktor pri dt člene mi hovorí, ako rýchlo plynie čas v danom mieste z pohľadu vzdialeného pozorovateľa. Čierne diery sú objekty, ktorých hmotnosť sa zrútila do bodu a tak vákuové riešenie platí (takmer) všade. A to znamená, že plocha $r = r_s$ je prístupná, z pohľadu vzdialeného pozorovateľa na nej zamŕza čas a spod nej nedokáže uniknúť ani len svetlo. Túto hranicu voláme horizont udalostí čiernej diery.

11.3 Kozmológia

Kozmológia skúma vesmír na tak veľkých škálach, že sa javí homogénny a izotrópny.

- Čo tieto pojmy znamenajú?

Einstein odvodil rovnice pre gravitáciu, ktorú opísal ako dôsledok zakrivenia časopriestoru. Táto rovnica dokáže opísať aj rozpínanie vesmíru ako celku.

- Ako vyzerá metrika na nafukujúcej sa sfére?

Meniaci sa priemer vesmíru opisuje faktor $a(t)$, ktorý opisuje zmenu metriky

$$ds^2 = a(t)^2 d\mathbf{r}^2 - c^2 dt^2. \tag{156}$$

V podstate ide o neuveriteľne zjednodušujúci predpoklad. Po prvé predpokladáme, že vesmír je veľmi jednoduchý vo svojom obsahu a po druhé, že je opísaný ako celok veľmi jednoduchým riešením – jedna funkcia času. Z Einsteinových rovníc sa dá odvodiť diferenciálna rovnica pre a, voláme ju Friedmannova rovnica:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi\kappa}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{157}$$

kde Λ je kozmologická konštanta, ρ, p sú hustota a tlak, napríklad hmoty alebo žiarenia.

Rozpínanie má rôzny vplyv na rôzne veci. Keď sa rozpína hmota, redne nepriamo úmerne s rastúcim objemom, teda $\rho_M = \rho_0 a^{-3}$. Žiarenie to má zložité, lebo s rozpínaním vesmíru sa naťahuje vlnová dĺžka svetla, $\lambda \sim a$ a tým pádom klesá jeho energie ako $E \sim a^{-1}$ a teda dokopy $\rho_R = \rho_0 a^{-4}$. Uvažuje sa o existencii tmavej energie, ktorej hustote sa rozpínaním neredne (napríklad, lebo je to energia prázdneho priestoru): $\rho_{DE} = \rho_{DE,0}$.

Dôležité ponaučenie – rôzne zloženie vesmíru ovplyvňuje jeho rozpínanie a zároveň rozpínanie vesmíru má rozdielny vplyv na vývoj hustôt.

- Čo vám to pripomína?

Ako sme spomínali, rozpínanie vesmíru má vplyv na vlnovú dĺžku svetla v ňom. Ak zdroj vyžiari svetlo s vlnovou dĺžkou 1 m, svetlo môže prísť natiahnuté, napríklad na 1.1 m. Kozmológovia používajú takzvaný faktor červeného posunu $z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_{\mathrm{emit}}}{\lambda_{\mathrm{emit}}}$ pre ktorý platí

$$a(t) = \frac{1}{1+z}. \tag{158}$$

- V akom čase je vyčíslený tento vzťah?

Ak poznám históriu rozpínania vesmíru, tak viem zo z faktoru spočítať, ako dlho k nám svetlo letelo. Treba poznať aj jeho vlnovú dĺžku v čase emisie, to však vieme ak to odpovedá nejakému špecifickému procesu, napríklad môže ísť o absorpčné čiary chemických prvkov.

Na záver malé spestrenie, ako vieme, aký veľký je vesmír? Do vesmíru sme si vystavali rebrík:

- Cez paralaxovú metódu sme odmerali vzdialenosť Mesiaca, Slnka a blízkych hviezd.
- V nich sme objavili cefeidy, ktoré slúžia ako štandardné sviece.
- Cez ne sme zmerali supernovy, ktoré je vidno krížom cez celý vesmír.

- Prediskutujte v stručnosti tieto metódy.

Celý vtip spočíva v tom, že bežne nevieme zistiť, či je objekt ďaleko alebo len svieti slabo. Výhrou sú objekty, ktoré nám svoj absolútny jas prezradia, napríklad podľa toho ako blikajú. Tým pádom vieme spočítať ich vzdialenosť. Stále však potrebujeme referenčnú hodnotu – tie skladáme rebríkovou metódou.

Vďaka tomu vieme, že vesmír je približne 13.8 miliardy rokov starý [30], má polomer asi 46.5 miliardy svetelných rokov a je prevažne tvorený z tmavej hmoty a energie – tie nevidno priamo, vidíme len ich gravitačný vplyv na vesmír ako celok či iné objekty.

Na začiatku vo vesmíre neplatili také fyzikálne zákony, ako ich poznáme dnes. To sa zmenilo za (asi) malinký zlomok sekundy. Vesmír rozpínaním

[30] "In the beginning the Universe was created. This has made a lot of people very angry and been widely regarded as a bad move." D. Adams

chladol a postupne tak umožňoval vznik stále krehkejších štruktúr. Najprv vznikli jadrá a presný moment, kedy tento proces ustal, určil počiatočný pomer prvkov vo vesmíre.

Vesmír bol sprvoti nepriehľadný, cez plazmu svetlo nepreniká. Keď ochladol natoľko, ako vznikli neutrálne atómy (asi vo veku 380 000 rokov), tak sa ním prvýkrát začalo šíriť svetlo. Vesmír ďalej chladol a postupne začala prevládať gravitácia a stláčať veci do štruktúr, z ktorých sa stali zárodky prvých galaxií. Svetlo, ktoré uniklo pri spriehľadnení vesmíru sa volá reliktové žiarenie. Rozpínanie jeho vlnovú dĺžku natiahlo na približne milimeter. Jeho presná štruktúra nesie cenné informácie o zložení raného vesmíru. Bolo objavené náhodou (ako rádiový šum) a ak ste mali doma analógový televízor, tak bolo zodpovedné za asi percento čierno-bieleho šumu v ňom.

11.4 Príklady

Špeciálna teória relativity

- Odvoďte Lorentzov faktor (cez príklad so zrkadlami).
- Pre hodnoty $v = 0.1\ c, 0.5\ c, 0.99\ c$ spočítajte γ.
- Pre hodnoty $\gamma = 2, 10, 100, 100000$ spočítajte v.
- Astronaut cestuje v kozmickej lodi pohybujúcej sa rýchlosťou $0.8\ c$ relatívne k Zemi. Misia astronauta trvá 2 roky podľa hodín na kozmickej lodi, koľko trvá z pohľadu Zeme? Aká dlhá bola cesta z pohľadu lode a z pohľadu Zeme?
- Elektróny v leptónových urýchľovačoch dosiahli rekordný $\gamma = 200\,000$. Ako rýchlo sa pohybovali a koľko vážili z pohľadu stojaceho pozorovateľa?
- Zoberte vzorec $E = mc^2$, dosaďte relativistickú hmotnosť ako funkciou pokojovej a rýchlosti a spravte Taylorov rozvoj pre malé v, čo dostanete?
- Nájdite z najvzdialenejšieho známeho objektu vo vesmíre a určite jeho vzdialenosť. (Použite kozmickú kalkulačku, sú dostupné na internete.)
- Akú vzdialenosť k nám priletelo reliktové žiarenie?
- Ak by vzdialenosť Zem-Slnko mala jeden centimeter, koľko by mala vzdialenosť Slnko-Proxima centauri?

- Ak by mala táto vzdialenosť jeden centimeter, koľko by mala naša galaxia?
- Ak by mala naša galaxia jeden centimeter, aký veľký je viditeľná vesmír?
- Vyriešte Friedmanovu rovnicu pre hmotu so zanedbateľným tlakom.
- Koľko trvá z pohľadu Slnka jeden pozemský rok (teda zohľadniť rýchlosť Zeme okolo Slnka).
- Ako je z pohľadu Slnka Zem zdeformovaná? (Uvažujte, že má v pokoji dokonale guľový tvar).

11.5 Projekty

- Odvodenie $E = mc^2$.
- Vysvetlite paradox dvojčiat.
- Vizualizácia boostov časopriestoru.
- Ako sa v neeuklidovskej geometrii počíta krivosť priestorov?
- Aké myšlienkové kroky priviedli Einsteina k všeobecnej teórii relativity?
- Aké máme argumenty pre a proti existencii tmavej hmoty. Čo by to (ne)mohlo byť?
- Ako sa vyskúmali Cefeidy?

12 Kvantová fyzika

Na úvod si prejdeme históriu poznávania hmoty a spomenieme úspešné modely, ktoré sme vďaka kvantovej fyzike vybudovali. Pomôže to zmierniť šok z nej.

12.1 História výskumu hmoty a jadrová fyzika

Kedysi ľudia nevedeli, z čoho sa skladá hmota. Ako to už v živote chodí, starovekí Gréci mali názor aj na toto – a niektorí dokonca správny. Išlo o atomistov [31], základ slova atóm je z gréckeho *atomon*, čo znamená nedeliteľný.

Že by na tejto myšlienke niečo mohlo byť, začali ľudia uznávať s nástupom chémie. John Dalton si všimol, že chemické reakcie plynov prebiehajú tak, že ich zložky sú v (malých) celočíselných pomeroch.

- Prečo?

Pomerne dlhé obdobie bola komunita rozdelená na dva tábory, jeden tábor bral atómy ako niečo reálne, iný zas len ako teoretickú abstrakciu. Konflikt ukončila až analýza Brownovho pohybu.

- Čo je Brownov pohyb?

Albert Einstein ukázal, že Brownov pohyb je dôsledkom interakcie peľového zrnka s molekulami vody. Atómy by sme teda mali. Analýzou katódových lúčov sa zistilo, že atómy obsahujú ľahké elektricky nabité častice – elektróny. Ako je rozložený v atóme kladný náboj? Dnes už vieme, že v malinkom jadre. Nie je to však jediná rozumná možnosť.

- Poznáte alebo viete vymyslieť iný model atómu?

Jedným z konkurenčných modelov bol Thomsonov pudingový model [32]. Kladný bol podla neho celý objem atómu, elektróny boli ako také hrozienka v ňom. Túto hypotézu však vyvrátil Rutherford, ktorý nastreľovaním jadier hélia na tenkú zlatú fóliu ukázal, že jadrá tvoria malú časť celkového objemu atómov.

- Dizajn experimentu je taký, že z jednej strany strieľame jadrá hélia a pozeráme sa, ktorým smerom sa odrazia. Ako vyzeral jeho výsledok pokusu a ako by vyzeral, ak by mal Thomson pravdu?

[31] Pre úplnosť treba povedať, že aj niektorí starovekí Indovia zastávali podobný názor.

[32] V Británii, odkiaľ Thomson pochádza, si pod pudingom ľudia predstavujú niečo o dosť iné, než u nás.

- Aké veľké sú jadrá, atómy a elektróny. Vymyslite vhodné prirovnania.

Ani jadro nie je fundamentálny objekt, z niečoho sa skladá. Na prvý pohľad by sme mohli čakať, že sa skladá z protónov, ktoré kompenzujú náboj elektrónov. Istým prekvapením mohla byť existencia neutrálnych častíc – neutrónov, ktoré kľúčovó prispievajú k stabilite jadier. Boli teda známe tri typy častíc: protóny, neutróny a elektróny.

- Čo sú to izotopy?

Okrem toho boli známe tri druhy žiarenia, ktoré produkovala hmota, konkrétne pri jadrových premenách: alfa, beta a gama. Alfa častice sú jadrá hélia, beta sú (anti)elektróny a gama žiarenie je vysokoenergické svetlo. Kľúčovým zistením bolo, že môže dochádzať k rádioaktívnym premenám, čo symbolicky zavŕšilo jeden sen alchýmie, z ktorej vlastne vzišla chémia a výskum hmoty ako takej.

- K akej zmene počtu protónov a neutrónov dochádza pri premenách, pri ktorých vznikajú spomínané formy žiarenia?

Okrem toho, že jadrové procesy môžu viesť na zmeny chemických prvkov, presúva sa pri nich značné množstvo energie. Má to dva dôvody. Po prvé, Einstein a jeho $E = mc^2$. Po druhé, skutočnosť, že hmotnosť atomárnych jadier **nie je** súčtom hmotností protónov a neutrónov. Ich hmotnosť je približne daná vzťahom, ktorý sa volá Weizsäckerov vzorec. Ak máme A nukleónov, Z protónov a N neutrónov, tak platí, že:

$$m = Zm_p + NM_n - \frac{E_B}{c^2}, \tag{159}$$

kde E_B je väzbová energia (B je ako *binding*), ktorá je daná vzťahom:

$$E_B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta(N, Z). \tag{160}$$

V tejto rovnici:

- a_V je objemový člen kvôli jadrovej interakcii,
- a_S je povrchový člen,
- a_C je člen za Coulombovské odpudzovanie protónov,

- a_A je člen za asymetriu (ťažší na vysvetlenie),
- δ je párovací člen (kvôli spinovej interakcii)[33].

Dôležité je, že rôzne počty neutrónov a protónov majú rôzne hmotnosti a tým pádom iné energie. Ak sa udeje rádioaktívna premena, nezmení sa celkový počet nukleónov, no zmení sa ich usporiadanie, čo vedie k zmene energie. To znamená, že niektoré premeny môžu vznikať spontánne a niektoré musíme stimulovať.

- Niektoré prvky sa radi spájajú a niektoré rozpadajú. Ktoré? A ktorý prvok je viac menej úplne spokojný?

Bežná možnosť je, že máme jadro, ktoré je stabilné – nemá sa dostupnými procesmi ako rozpadnúť na niečo s nižšou energiou, respektíve takýto proces trvá nesmierne dlho. Keď mu dodáme neutrón, situácia sa zmení, stane sa nestabilným a rozpadne sa veľmi rýchlo. Pri tom sa uvoľnia ďalšie neutróny, ktoré sa môžu zachytiť v ďalších jadrách a vzniká reťazová reakcia. To v kontrolovanom prípade vedie k jadrovému reaktoru a v nekontrolovanom k atómovej bombe.

12.2 Časticová fyzika

Vo fyzike sa stretli dve novinky: kvantová mechanika a teória relativity so slávnym $E = mc^2$. Kvantová mechanika nás naučila – ako si čoskoro ukážeme –, že máme zohľadniť všetky procesy, ktoré môžu nastať (napríklad všetky trajektórie, ktoré spájajú body A a B). Relativita nás zas naučila, že energia sa môže meniť na hmotu. Začína to byť komplikované! Musíme zahrnúť všelijaké procesy, kde častice vznikajú, zanikajú a rôzne medzi sebou interagujú. Relativitu už poznáme, kvantovú fyziku si predstavíme o chvíľu. Na motiváciu si najprv pozrieme, kam nás ich spojenie vlastne dostalo.

12.2.1 Kvantová elektrodynamika

Prvý významný krok bola kvantová elektrodynamika, ktorú zhotovilo viacero ľudí, výrazne prispel aj Richard Feynman. Takzvané Feynamnove diagramy používame na zápis a spracovanie všetkých možných scenárov, ktoré môžu

[33]Spin je vlastnosť elementárnych častí, ktorá okrem iného udáva ich interakciu s magnetickým polom a opisuje, ako sa častica správa pri rotácii.

nastať. Pohyb elektrónu (alebo pozitrónu) v nich predstavuje rovná čiara. Pohyb fotónu predstavuje vlnka. Jediná možná interakcia v diagrame je stretnutie dvoch rovných čiarok a jeden vlnky (napríklad fotón je absorbovaný elektrónom). Keď do reakcie vstupujú dva elektróny a dva z nej vylietavajú (teda rozptyl elektrónov), tak nakreslíme dve rovné čiarky na vstupe, dve na výstupe a zisťujeme, akými spôsobmi ich môžeme pospájať, ak máme povolený len jeden typ vertexu (spojnice).

- Nakreslite si diagram pre proces interakcie elektrónu s elektromagnetickým polom a pre proces rozptylu dvoch elektrónov.

Feynamnové pravidlá nám hovoria, ako ku každému diagramu priradiť číslo, faktor, ktorý zaváži do celkovej pravdepodobnosti, že sa proces udeje. Pravidlá nám hovoria, čo máme pridať za každý propagátor (čiara), vertex (spojnica), či ako zohľadniť kombinatoriku rôznych procesov.

Problém je, že takýchto možností je veľmi veľa, presnejšie nekonečne veľa. Dôležité zistenie je také, že za každý vertex vstupuje do výsledku malý faktor. Takže čím viacej vertexov (alebo ekvivalentne, čím viacej uzavretých slučiek), tým menší príspevok. Diagramom bez slučiek sa hovorí stromové (žiadna slučka, len trčia vetvičky), ďalej vieme diagramy zoradiť podľa počtu slučiek. Čím viacej slučiek, tým menší príspevok.

- Je vidno prečo? Môže to v princípe niečo zvrátiť?

Podľa požadovanej presnosti si viem vybrať, koľko diagramov zahrniem do výsledku – vďaka tomu vieme s kvantovou elektrodynamikou veľmi slušne a presne pracovať. Niektoré zhody medzi experimentom a teoretickou predpoveďou sú na vyše desať platných cifier, to je nevídaná presnosť.

- Kde sme postupné spresňovanie výsledkov už videli?

Tento postup sa volá poruchový počet a v niečom pripomína postup, ktorý sme používali na anharmonický oscilátor. Výsledok vieme ľubovoľne spresňovať, no náročnosť krokov narastá a tak to v istom bode – napríklad, keď narazíme na úroveň presnosti experimentov – ukončíme.

Jedným z prvých veľkých úspechov kvantovej elektrodynamiky bol Diracov (teoretický) objav antičastíc, ktoré tvoria akoby zrkadlový obraz hmoty. Väčšinu vlastností majú rovnakých, napríklad hmotnosť, no majú opačný elektrický náboj. Takže k elektrónu existuje pozitrón, k neutrínam antineutrína a podobne.

- Čo sa stane pri stretnutí častice s antičasticou?
- Čo sa stane pri stretnutí lopty s antiloptou? (Návod: Viď Leiderfrostov efekt.)

12.2.2 Kvantová chromodynamika

Zistilo sa – čiastočne analýzou štruktúr zložených častíc a čiastočne z rozptylových experimentov – že protóny a neutróny sa skladajú z troch častíc, ktoré dnes voláme kvarky. Ide o dva kvarky, up a down (horný a dolný), jeden má elektrický náboj $+2/3\ e$, druhý $-1/3\ e$, kde e je veľkosť náboja elektrónu. Dokopy tak trojica tvorí buď časticu s jedna alebo nula násobkom základného náboja. Existujú aj iné kombinácie kvarkov, napríklad mezóny obsahujúce párny počet kvarkov, kvarky však nemôžu existovať izolovane, hovorí sa tomu väznenie kvarkov. Okrem troch základných (takzvaných valenčných) kvarkov s v časticiach nachádza aj veľa iných virtuálnych častíc. To sú také, ktoré existujú ako dôsledok kvantových fluktuácií. Mierne ich čoskoro spomenieme. Čo by sa stalo, ak by ste sa kvark pokúsili vytrhnúť z jadra? Vznikne nový pár kvark-antikvark.

Tak, ako interakciu elektrónov sprostredkúvajú fotóny, tak kvarky spolu interagujú prostredníctvom gluónov (*glue* ako lepidlo). Kvarky majú zároveň novú vlastnosť – farbu, ktorá však nemá súvis s normálnou farbou, akurát má tri základné zložky (a ľudské oko má čapíky na tri rôzny farby [34]). Farbu majú aj kvarky, ich interakciami sa zaoberá kvantová chromodynamika.

Ide o veľmi zložitú teóriu. Na rozdiel od fotónov, gluóny interagujú aj medzi sebou, čo robí výpočtovú kombinatoriku oveľa zložitejšou. Zároveň neplatí, že „čím viac slučiek, tým menší príspevok“ a tak aj veľmi prepletené interakcie zavážia. Táto sila sa volá „silná“ a vo všeobecnosti na jej analýzu potrebujeme superpočítače (len v istých režimoch ich netreba). Na rozdiel od elektrodynamiky tu neplatí, že komplexné situácie do výpočtu vstupujú len s malým faktorom a tým pádom nemáme možnosť nekonečné výpočty v istom bode useknúť.

[34] Táto analógia siaha hlbšie, než len tri tu a tri tam. Pri výbere základných farieb máme istú voľnosť, napríklad namiesto červenej-zelenej-modrej používame niekedy magentu, azúrovú a žltú. Vedú však na rovnaký výsledok. Podobná voľnosť platí aj pri farbách kvarkov a gluónov.

12.2.3 Slabé interakcie

Pri skúmaní jadrových (beta) premien si ľudia všimli, že im nesedí celkový súčet energie. Fermimu napadlo, že možno existuje prakticky neviditeľná častica, ktorá časť energie odnáša. Mal pravdu – ide o takzvané neutríno. Za sekundu ich cez vás preletia miliardy, za život sa zachytí len jedno (a vyvolá jadrovú beta premenu). Neutrína vznikajú pri jadrových procesoch v Slnku, Zemi, jadrových reaktoroch či pri výbuchoch supernov. Nepozorujeme ich priamo, ale cez Čerenkovovo žiarenie vyvolané časticou, ktorú ich interakcia vyvolala.

- Čo je to Čerenkovovo žiarenie?

Ukázalo sa, že okrem silnej jadrovej sily existuje aj slabá jadrová sila, ktorá súvisí s beta procesmi. Podobne, ako gluóny sprostredkúvajú silnú jadrovú silu a fotóny elektromagnetickú, začali sa hľadať častice (teoreticky aj experimentálne), ktoré by boli zodpovedné za slabú jadrovú silu. Dnes ich poznáme ako Z^0, W^+, W^- bozóny. Interakcia cez ne je však veľmi ťažká. Svoje o tom vedia neutrína, ktoré so zbytkom hmoty interagujú len prostredníctvom nich – a tým pádom prakticky vôbec.

- Čo sú to bozóny a fermióny?

Prečo je interakcia s nimi tak slabá? Lebo ju sprostredkúvajú ťažké (a teda energeticky drahé) W, Z bozóny, kým fotóny a gluóny sú nehmotné. Je to zvláštne, lebo na istom mieste teoretického opisu sa žiadalo, že tieto bozóny musia byť nehmotné – bez toho sa matematicky formalizmus rozpadá. Ako môže byť niečo nehmotné a ťažké naraz? Odpoveďou sa stalo Higgsovo pole a jeho častica, Higgsov bozón.

12.2.4 Higgsov bozón

Vysvetlenie pozostáva z dvoch krokov. Po prvé, toto pole má zvláštnu vlastnosť – minimum potenciálu je pri nenulovej hustote energie poľa. To znie záhadne, chce sa tým povedať, že pre toto pole je energeticky najvýhodnejšie niekde byť ako nebyť.

- Dalo by sa povedať, že sa správa ako anharmonický oscilátor s imaginárnou hmotnosťou. Skúste si pre takéto niečo nakresliť graf potenciálnej energie a nájsť jeho minimum. Nápoveda: $U(x) = -bx^2 + gx^4$.

Druhý krok je, že sa toto pole viaže na rôzne častice a efektívne tak zvyšuje ich energiu respektíve hmotnosť. Takže spomínané W, Z bozóny sú samé osebe nehmotné – takže matematický formalizmus je konzistentný – no efektívne im hmotnosť dodáva Higgsovo pole. A kvôli ich vysokej hmotnosti sprostredkúvajú interakciu len slabo, preto je slabá jadrová sila slabá.

Pre úplnosť treba dodať, že síce je Higgsovo pole zdrojom hmotnosti, zďaleka nie celej. Hmotnosť hmoty je koncertovaná v jadrách, tie sú na prvý pohľad tvorené trojicou kvarkov. Ani kvarky však nie sú zodpovedné za väčšinu hmotnosti, v jadre totiž prebieha divoké kvantové bublotanie kvarkov a gluónov a energie týchto častíc je zodpovedná za väčšinu hmotnosti.

Mimochodom, tak ako je fotón kvantom elektromagnetické poľa je kvantom Higgsovho poľa Higgsov bozón. Ten bol v roku 2012 objavený v LHC v CERNe, tento objekt uzatvoril, ako posledný dielik skladačky, štandardný model časticovej fyziky.

12.2.5 Štandardný model časticovej fyziky

Zhrňme si to. Objavilo sa niekoľko častíc hmoty: kvarky, elektróny a neutrína a objavili sa častice, ktoré sprostredkúvajú interakciu medzi nimi, špeciálnu úlohu zohráva Higgsovo pole, ktoré je skalárne.

- Čo je to skalárne pole? Aké sú tie ostatné polia?

K časticiam hmoty existujú antičastice, to sme vedeli dlho. Istým prekvapením bola skutočnosť, že všetky častice hmoty existujú v troch kópiách (takzvané rodiny alebo generácie), ktoré sú rovnaké až na hmotnosť. Máme teda napríklad elektrón, mión a tau-leptón. Bežne majú ťažšie častice tendenciu rozpadať sa na ľahšie, takže napríklad mión sa rozpadné na elektrón a pár neutríno a antineutríno.

Dokopy tak získavame krátky zoznam, ktorý obsahuje všetky známe elementárne častice hmoty a zároveň častice, ktoré sprostredkúvajú všetky (negravitačné) interakcie medzi nimi. Dokopy sa táto teória volá Štandardný model. Vieme aké častice tvoria svet okolo nás a ako interagujú. V niektorých prípadoch máme počty dobre pod kontrolou, v niektorých sa spoliehame na počítače. Tušíme, že tento obraz nie je úplný ...

- Čo nám očividne chýba?

... no kým sa k tomu dostaneme, tak si po tomto veľmi dlhom úvode spravíme ešte jeden kratší úvod a potom sa pozrieme na druhý pilier modernej fyziky – kvantovú mechaniku.

12.3 Cesty ku kvantovej fyziky

Kvantová mechanika je, slušne povedané, zvláštna. Newtonovská mechanika funguje celkom dobre, čo teda prinútilo ľudí od nej upustiť? A čo viac, nahradiť ju *týmto*? Síce je kvantová teória asi najveľkolepejšia fyzikálna teória (minimálne v top dvojke), no aj tak jej úplne nerozumieme ani po sto rokoch. Medzi klasickou a kvantovou fyzikou je obrovský skok, na ktorý musela fyzikálna komunita nabrať odvahu a dáta. Aké kroky boli rozhodujúce?

12.3.1 Fotoelektrický jav

Edmond Becquerel si v roku 1883 všimol, že ak dve platne z platiny alebo zlata namočil do zlata a každú vystavil inej miere slnečného žiarenia, vznikol medzi nimi prúd. Ide o takzvaný fotovoltaický jav. Tento efekt dnes využívajú, samozrejme s inými materiálmi, fotovoltické články.

Na tomto by ešte nič nebolo také zvláštne. Vieme, že svetlo má energiu a že energiu môže odovzdávať elektrickým nábojom (a naopak). Tok energie je úmerný $\mathbf{E}^2$. Inými slovami, čím intenzívnejšie žiarenie na niečo svieti, tým viac to zohrieva. Ak sedíte pri dvoch sviečkach, tak vás hrejú dvakrát viac, ako jedna. [35] Podobnú skúsenosť máme aj so svetlom. Ak si do očí zasvietime dvomi baterkami, je to dvakrát horšie, ako keby sme si do nich zasvietili len jednou. Nič zvláštne. Až na jednu vec – pri uvoľňovaní elektrónov sa svetlo správalo inak.

Dizajn experimentu bol takýto: svetlom sa zasvietilo na dosku a z nej vyleteli elektróny. Doska bola umiestnená v elektrickom poli a tak na prekonanie vzdialenosti medzi doskami potrebovali elektróny dostatočnú energiu. Napätie medzi doskami vieme meniť. Keď je veľké, nepreletí nič. Keď ho znížime, preletí aspoň sem-tam niečo. Menením elektrického poľa a kontrolovaním, či cez neho niečo preniklo sa dalo merať, či svetlo dokáže vykopnúť elektróny z kovu a ak áno, koľko kinetickej energie majú.

Človek by čakal, že ak na niečo zasvieti červeným svetlom z jednej baterky a z kovu neunikne žiaden elektrón, tak ak takých bateriek zoberie sto alebo tisíc, elektróny z materiálu vypudí. To sa ale nedeje! Intenzita svetla nepomôže elektrónom uniknúť a nezväčší ani maximálnu kinetickú energiu, s ktorou unikajú. Čo je ešte prekvapivejšie, pomáha zmena farby svetla! Čo

[35] Pri teplote ohňa vzniká infračervené/termálne žiarenie, ktoré sa zachytí v našej koži a ohrieva ju.

nedokáže veľa červených svetiel dokáže jedna fialová. Ako je to možné?

Riešenie tejto hádanky priniesol – znovu – Einstein a získal zaň Nobelovu cenu. Navrhol, že svetlo nie je kontinuum elektromagnetického vlnenia, ale, že s hmotou interaguje vo forme malých balíčkov – kvánt – ktoré voláme fotóny. Energia fotónu je

$$E = \nu h, \tag{161}$$

kde ν je jeho frekvencia a h je takzvaná Planckova konštanta.

- Aké má jednotky?

Elektróny sú zachytené v potenciálovej jame a je treba dodať energiu W na ich uvoľnenie. Fotóny interagujú s elektrónmi po jednom. Ak je energie jedného fotónu menšia, než W, tak elektróny neuvoľnia. Ak je väčšia, tak elektróny vyletia aj s prebytočnou kinetickou energiou

$$K = \nu h - W. \tag{162}$$

12.3.2 Planckov zákon

Horúce železo je červené. Podobne ako horúce kamene, hviezdy a vlastne hocičo. Hocičo zohrejte, začne to žiariť – to je princíp starých žiaroviek, no rovnaký mechanizmus vás aj hreje pri ohni.

- Viete povedať príklad niečoho horúceho, čo nesála?

Z Maxwellových rovníc sme sa dozvedeli okrem iného to, že svetlo je elektromagnetické žiarenie. Môžeme sa na neho pozerať ako na samostatnú fyzikálnu entitu. Ako však súvisí s teplotou? Prečo pri nízkej teplote nevidíme žiarenie a pri vysokej áno? Dve veci: Po prvé, ak je elektromagnetické pole v kontakte s materiálom, môže sa ich teplota vyrovnať. Po druhé, teplota elektromagnetického žiarenia je dobre definovaná vec! Spomeňte si, že sme mali niekoľko rôznych definícií teploty. Jedna z nich bola, že ak mám systém, ktorý sa môže nachádzať v rôznych stavoch, tak pravdepodobnosť nájsť systém v danom stave je úmerná $P_i \sim e^{-E_i/kT}$. Takže ak mám svetlo pri nízkej teplote, budú pravdepodobné nízkoenergetické stavy a pri vysokej teplote zas vysokoenergetické.

Prirodzený pohľad na svetlo – keďže ide o vlnenie – je cez rozklad do frekvencií, teda do módov. Módy, teda jednotlivé frekvencie svetla, sú jeho stupne voľnosti. Z termodynamiky si však pamätáme, že každý stupeň voľnosti má energiu $E = \frac{1}{2}k_BT$. Frekvencií je ale nekonečne veľa a tak by mala byť aj nekonečne veľká energia elektromagnetického žiarenia. Tomuto problému sa hovorí UV katastrofa, keďže do nekonečnej frekvencie prispievajú hlavne vysokofrekvenčné módy.

Max Planck si uvedomil, že problém sa dá vyriešiť malou matematickou fintou – svetlo nemôže pribúdať po ľubovoľne malých množstvách, ale len po malých balíkoch – kvantách. Opravený vzťah viedol k správnemu výsledku, ktorý dnes poznáme ako Stefan-Boltzmanov zákon pre intenzitu vyžarovaného svetla

$$I = \sigma T^4, \tag{163}$$

kde $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \approx 5.67 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$. Tomuto modelu sa hovorí žiarenie čierneho telesa.

- Prečo čierneho?

- Ako vyzerá jeho spektrum? Skúste približne načrtnúť krivku, ktorá opisuje spektrum, teda aká je intenzita žiarenia pre rôzne vlnové dĺžky pri telese istej teploty.

12.3.3 Stabilita atómov

Zrýchľujúci (meniaci rýchlosť či smer) elektrický náboj vyžaruje elektromagnetické pole, čím stráca energiu. Ako je teda možné, že elektróny nespadnú do jadra? To bola veľká otázka hneď potom, čo Rutherfordove pokusy ukázali, že atóm viac vyzerá ako planetárny systém než ako puding. Zároveň sa vedelo, že atómy môžu prijať či vyžiariť len fotón s energiou $E \sim E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$, kde n, m sú celé čísla. To napovedá, že elektróny sa môžu nachádzať len v stavoch $E \sim E_0/n^2, n = 1, 2, 3...$.

Klasický opis orbitov je rovnováha medzi odstredivou a dostredivou (elektrickou) silou:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Z k_e e^2}{r^2}, \tag{164}$$

z čoho máme

$$v = \sqrt{\frac{Z k_e e^2}{m_e r}}. \tag{165}$$

Niels Bohr toto obohatil nápadom, že čo ak sa častice môže pohybovať len po trajektóriách, pri ktorých je moment hybnosti kvantovaný [36]:

$$L = m_e v r = n\hbar, \tag{166}$$

kde $\hbar = h/(2\pi)$. Ak dosadíme vzťah pre rýchlosť, dostaneme

$$m_e \sqrt{\frac{k_e Z e^2}{m_e r}} r = n\hbar, \tag{167}$$

čiže

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{Z k_e e^2 m_e}. \tag{168}$$

Hodnota r_1 odpovedá typickej veľkosti atómov, sme na dobrej ceste!

- Naozaj? Koľko to je?

Energia takéhoto systému je

$$E = -\frac{Z k_e e^2}{2 r_n} \approx -E_0 \frac{Z^2}{n^2}, \tag{169}$$

kde $E_0 = -13.6\ eV$. Toto presne vysvetlilo energiu elektrónu a energiu vyžiareného svetla, aj keď celkovo nejde o úplne presný opis – ten odvodil až Schrödinger.

12.4 Kvantová mechanika

V roku 1924 vyslovil Louis-Victor de Broglie myšlienku, že všetka hmota má vlnovú povahu, kde vlnová dĺžka je daná vzťahom [37]

$$\lambda = h/p. \tag{170}$$

Je to tak. Objavuje sa tam už známy nový hráč vo svete fyziky – Planckova konštanta h. Tá sa (v redukovanej podobe) objavila aj v ďalšom známom vzťahu od Wernera Heisenberga, ktorý poznáme ako princíp neurčitosti

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{171}$$

kde Δ predstavuje nepresnosť (odchýlku) v meraní danej veličiny.

- Δ predstavuje neurčitosť merania danej veličiny, ako interpretovať tento vzťah?

[36] Vo fyzike sa objavila nová konštanta, h, ktorá má také jednotky, že pasuje všelikam.

[37] Motivoval ho komentár jeho brata o tom, že röntgenové žiarenie sa občas správa ako častica.

12.4.1 Vlnová funkcia

Kľúčovým zistením kvantovej fyziky je, že na opis správania hmoty (aj svetla) na mikroskopickej úrovni je treba **úplne iný** formalizmus, než poznáme v klasickej mechanike. (Teda, aspoň na prvý pohľad, neskôr sa objavil v teoretickej fyzike postup, ako takéto teórie skonštruovať pomerne priamočiaro.) Kým v klasickej mechanike opisujeme stav hmotného bodu pomocou jeho polohy a hybnosti, v kvantovej mechanike to robíme pomocou pravdepodobnostnej vlnovej funkcie $\Psi(\mathbf{r})$. Ide o komplexnú funkciu súradníc, ktorá spĺňa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = 1, \tag{172}$$

kde $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ a $*$ predstavuje komplexné združenie. Interpretácia $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ je taká, že ide o hustotu pravdepodobnosti nájsť časticu v danom mieste. V niečom je to podobné ako bežná pravdepodobnostná teória, no má to kľúčový rozdiel – v kvantovej mechanike sa môžu pravdepodobnosti od seba odpočítavať (keďže umocňujeme až po sčítaní vlnových funkcií). Pridáte možnosť, ako môže niečo nastať a klesne pravdepodobnosť, že sa to stane. Môže za to (deštruktívna) interferencia vlnových funkcií.

- Nedá sa spraviť kvantová fyzika len s reálnymi funkciami?

Pravdepodobnosť nájsť časticu v objeme V je

$$P(V) = \int_V |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}. \tag{173}$$

Podmienka (172) teda hovorí, že pravdepodobnosť nájsť časticu *niekde* je 100%.

12.4.2 Operátory

Na opis stavu častice teda používame vlnové funkcie. Čo opisuje fyzikálne veličiny? Operátory. Čo je operátor? Zobrazenie, ktoré jednej funkcii priradí inú. Napríklad x-ová zložka polohy a hybnosti častice zodpovedajú operátory, značíme ich strieškou:

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \tag{174}$$

$$\hat{x} = x. \tag{175}$$

Strednú hodnotu veličiny, ktorej náleží operátor $\hat{\mathcal{O}}$, určíme ako

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r})\hat{\mathcal{O}}\Psi(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}. \tag{176}$$

Prečo strednú hodnotu a nie presnú? Lebo v kvantovo-mechanickom sveta pracujeme nie s presnými veličinami ale s pravdepodobnosťami. Ak by ste mali tú istú časticu v mnohých kópiách a pri každej zmerali polohu, dostanete iné výsledky. Rôznym výsledkom viete priradiť pravdepodobnosti a viete spočítať, aká bude priemerná hodnota výsledku.

Operátory viem dokopy skladať, či už sčítavať alebo násobiť. Násobenie znamená, že operácie robím po sebe

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \hat{x} + 0.3\hat{p}, \\ \mathcal{O}_2 &= \hat{x}\hat{p}\hat{x^2}, \end{aligned} \tag{177}$$

Dokopy hovoríme, že operátory tvoria operátorovú algebru, prípadne dokonca nekomutatívnu operátorovú algebru, lebo na poradí operácií záleží. Ak získavam informáciu o jednom, strácam informáciu o druhom. To je základom Heisenbergovho princípu neurčitosti (171), ktorý sa dá odvodiť zo vzťahu

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{178}$$

- Aké to môže mať fyzikálne vysvetlenie? (Nápoveda: polohu meriame fotónmi a tie majú hybnosť.)

Ako si to predstaviť? Predstavte si krabicu a v nej mám jednu časticu, ktorej pravdepodobnosť výskytu je popísaná vlnovou funkciou. Jednoduchá sínusovka má veľmi presnú hybnosť ...

- Ako vyzerajú vlastné stavy operátora hybnosti?

... no je rozťahaná cez celú krabicu. Na druhú stranu, dobre lokalizovaná častica je popísaná vlnovou funkciou, ktorá je všade takmer nulová a nenulová len na veľmi úzkej oblasti. Ako takúto vlnu vyrobiť? Treba sčítať veľa rôznych sínusoviek (alebo iných vlastných stavov operátora hybnosti) a teda stavu s presnou polohou odpovedá veľa rôznych hybností. Takže ešte raz: rozťahaná vlna má jasnú hybnosť a nejasnú polohu, koncentrovaná vlna má jasnú polohu ale nejasnú hybnosť. Vlnová funkcia sa presnou polohou aj hybnosťou sa nedá skonštruovať.

Predstavte si, že si vyrobím časticu s presnou hybnosťou – pekná monotónna vlnka v celej krabici. Keď však zmeriam jej polohu, tak sa vlnu zrazu koncentruje a lokalizuje v mieste, kde som časticu našiel – spoznal som polohu, ale stratil informáciu o hybnosti, keďže sa zmenil pripravený pekný stav.

Mimochodom, proces merania, kedy sa z jedného stavu zrazu stane stav iný, nie je v kvantovej mechanike riadne pochopený, Schrödingerova rovnica – hneď si ju predstavíme – ho nedokáže popísať. Toto sa berie ako jeden z hlavných nedostatkov kvantovej fyziky.

Vráťme sa späť k stavom. Stav častice sa samozrejme môže meniť v čase, vývoj udáva spomínaná Schrödingerova rovnica

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t), \tag{179}$$

kde $\hat{H}$ je operátor zvaný Hamiltonián a v klasickej fyzike mu odpovedá celková energia častice, teda $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$, kde $\hat{T}$ je operátor kinetickej energie a $\hat{U}$ je operátor potenciálnej energie. Ten druhý je v bežných prípadoch len normálnym násobkom, napríklad Coulumbov potenciál $\frac{\alpha}{r}$ má operátor $\hat{U}\Psi(\mathbf{r},t) = \frac{\alpha}{r}\Psi(\mathbf{r},t)$. Operátor kinetickej energie závisí od súradníc, v akých úlohu riešime. V kartézskych súradniciach to je

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \tag{180}$$

kde m je hmotnosť častice a Δ je starý dobrý laplacián [38].

Často nás zaujímajú stacionárne riešenie Schrödingerovej rovnice:

$$\hat{H}\Psi_n(\mathbf{r},t) = E_n\Psi_n(\mathbf{r},t), \tag{181}$$

ktorých riešením je jednoducho: $\Psi_n(\mathbf{r},t) = \Psi_n(\mathbf{r})e^{iE_nt}$.

- Dokážte.
- Dalo by sa povedať, že hľadáme vlastný stav operátora $\hat{H}$?
- Stručne prediskutovať riešenie pre atóm vodíka.

Dôležitou vlastnosťou riešení takejto rovnice je, že v mnohých prípadoch tvoria riešenie diskrétne spektrum a časovo-premenlivé riešenie z nich vieme skladať.

- Čo vám toto pripomína?

[38] Prečo je fajn používať laplacián? Okrem toho, že je to ako značenie kratšie, tak má príjemnú vlastnosť – vieme, čo písať, ak pracujeme v iných súradniciach, ako Euklidovských.

12.4.3 Superpozície

Kľúčovým aspektom Schrödingerovej rovnice je jej linearita – súčet riešení je tiež riešením rovnice

$$\Psi(\mathbf{r},t) = c_1\Psi_1(\mathbf{r},t) + c_2\Psi_2(\mathbf{r},t) + \dots \,. \tag{182}$$

Jedným z dobrých príkladov je spin, ktorý môže nadobúdať len dva rôzne stavy

$$\Psi = c_1\Psi_\uparrow + c_2\Psi_\downarrow. \tag{183}$$

Bornovo pravidlo hovorí, že koeficienty c_i udávajú pravdepodobnosť nájsť časticu v danom stave

$$P_i = |c_i|^2. \tag{184}$$

- Aká z toho vyplýva podmienka na koeficienty c?

12.4.4 Štruktúra kvantovej mechaniky

Takže si to zhrňme. Stav častice sa dá rozkladať do bázy základných stavov. Základných (bázových) stavov môže byť aj nekonečne veľa, pričom ich vieme sčítať dokopy s rôznymi koeficientami. To vlastne znamená, že stavy v kvantovej mechanike tvoria vektorový priestor. Na rozdiel od jednoduchého vektorového priestoru, tu uvažujeme aj komplexné koeficienty a bázových vektorov môže byť nekonečne veľa (ale nemusí, viď príklad so spinom).

- Aká je báza pre spiny?

A čo viac, aj tento vektorový priestor je vybavený skalárnym súčinom – teda niečím, čo zoberie dva jeho elementy a ako výsledok nám dá číslo

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int \Psi_1\Psi_2^* \, d^3\mathbf{r}. \tag{185}$$

Takže máme trochu iný vektorový priestor, ako sme zvyknutí, no je vybavený skalárnym súčinom ...

- Kde sme už podobný videli?

... ktorý nám udáva veľkosti. Fyzikálne sú významná stavy, ktoré majú velkosť 1, keďže ich interpretujeme ako pravdepodobnosť [39].

No a na tomto priestore stavov pôsobia isté operátory (ktoré rešpektujú jeho vektorovú štruktúru), ktoré stavy zobrazujú na iné stavy. Štruktúra kvantovej mechaniky vlastne nie je zložitá a ponáša sa na veci, ktoré sme už videli.

Dve významné zmeny, ktoré priniesla, sú tieto. Po prvé, musíme používať nový formalizmus, lebo pri operátoroch záleží na poradí v akom ich aplikujem a to vedie na to, že meranie jednej veličiny narúša meranie inej – to súvisí s Heisenbergovým princípom neurčitosti. Po druhé, vektorový priestor stavov má komplexné koeficienty a to znamená, že pravdepodobnosti sa môžu navzájom rušiť. Na záver sa pozrieme na ešte jednu, zdanlivo úplne inú formuláciu kvantovej mechaniky, ktorá ponúkne inú intuíciu.

12.4.5 Dráhový integrál

Známym príkladom v kvantovej fyzike je dvojštrbinový experiment. Ak častici postavíme do cesty zábranu s dvomi otvormi, ako vlnová funkcia prejde cez obe a na stene za ňou vznikne interferenčný obraz – na niektoré miesta dopadá častica často a na niektoré zriedka. Čo ak by som za seba postavil viac stien? Musím zahrnúť možnosti ako vlnová funkcia prechádza cez ne. Čo ak by otvorov bolo viac? Treba ich tiež zahrnúť. Čo ak spravím limitu nekonečne veľa stien s nekonečne veľa otvormi? Musím započítať všetky možné dráhy, ktoré spájajú body A a B. Preto sa takémuto postupu hovorí dráhový integrál.

- Nakreslite si to.

Každá dráha zaváži faktorom [40]

$$e^{iS/\hbar}, \tag{186}$$

a výsledky sa dokopy sčítajú. To S vo vzorci je klasický účinok $S = \int L\ dt$, kde L je Lagranžián. Niekedy zaváži len klasická trajektória medzi dvomi bodmi, niekedy aj kvantové korekcie. Kedy? Účinok má rozmer Js, rovnako

[39] Spôsob, ako toto uchopiť, je aj taký, že dva vektory považujeme za rovnaké, ak sa líšia len veľkosťou. Takže vlastne dochádza zjednoteniu $\Psi \sim a\Psi$. Množina všetkých takto zjednotených vektorov sa označuje lúč. Názov celkov dáva zmysel, skúste si to nakresliť.

[40] Každý faktor je komplexná jednotka.

ako $\hbar$. Keď sa častica pohybuje s účinkom porovnateľným s $\hbar$ je kvantové správanie dôležité, ak zas platí, že $S \gg \hbar$, môžeme ho ignorovať.

Typicky do výsledky prispievajú tie trajektórie, kde je účinok extremálny – tam sa pri malej zmene trajektórie zmení len trochu a teda veľa podobných dráh prispieva rovnakým fázovým faktorom a ich príspevky interferujú konštruktívne. Pri trajektóriách, ktoré sú ďaleko od extremálnych ...

- Ďaleko voči čomu? A čo znamená ďaleko?

... sa komplexná fáza príspevkov mení divoko a navzájom sa odčítavajú. V limite $\hbar \to 0$, mimochodom, dostávame klasickú mechaniku.

12.5 A čo bude ďalej?

12.5.1 Kvantová gravitácia

História vedy a špeciálne fyziky nás učí, že rôzne teórie majú – pod našim drobnohľadom – tendenciu sa spájať. Kedysi sme mali elektrinu a magnetizmus, potom sme mali elektromagnetizmus a dnes máme elektroslabú silu – pridala sa aj slabá jadrová. Celkový počet fundamentálnych teórii sa nám podarilo okresať na dve: všeobecná teória relativity a štandardný model časticovej fyziky. Dve je málo, jedna by bola ešte menej.

Fyzika tak dlho hľadá zjednocujúci teóriu, ktorá by zahŕňala časticovú (kvantovú) fyziku aj gravitáciu – zatiaľ márne hľadáme teóriu kvantovej gravitácie.

Prvý pokus je vložiť gravitáciu do časticovej fyziky. Gravitačné pole je opísané pomocou metrického tenzora, ktorého kvantum voláme gravitón. Gravitón je nehmotný bozón so spinom 2, čo je viac než ostatné elementárne častice. Matematicky sa dá ukázať, že jeho prítomnosť „kazí“ fyzikálne teóriu, vznikajú v nich neodstrániteľné nekonečná.

Druhá možnosť ja aplikovať kvantový prístup k teórii gravitácie. Jedna z formulácií kvantovej mechaniky je „sčítaj cez všetky možnosti, ktoré môžu nastať“. Čo to však znamená v praxi? Máme sčítať cez všetky možné deformácie časopriestoru? Všetky možné metrické tenzory? Cez rôzne topológie? Rôzne počty rozmerov?

Existuje niekoľko približných teórií, pomocou ktorých dokážeme niektoré vlastnosti kvantovej gravitácia nahliadnuť. Zároveň existujú experimenty, ktoré sa kvantovú gravitáciu snažia testovať – napríklad zmerať gravitačné pôsobenie častice v superpozícii.

12.5.2 Teória strún

Jeden z úspešnejších prístupov ku kvantovej gravitácii je teória strún, aj keď aj tá má stále ďaleko k uspokojivej teórii.

Teória strún vzišla z potreby vysvetliť isté správanie častíc, vyrástla z nej však fundamentálna teória, ktorá má ako základný objekt otvorené či uzavreté struny. Rôznym vibráciám strún odpovedajú rôzne elementárne častice.

Teória strún má silné lákadlo – je matematicky veľmi obmedzujúca, bolo by pekné mať teóriu, ktorá neobsahuje žiadnu voľnosť pri výbere hodnoty parametrov. Problémom však je, že teória strún si žiada 26-rozmerný časopriestor (10-rozmerný pre superstruny).

Prečo sa vôbec o takejto teórii bavíme ďalej, ak vidíme, že svet mám len 3 priestorové rozmery plus čas? Myšlienka je taká, že extra priestorové rozmery sú veľmi malé a nevidíme ich priamo, majú však vplyv na ich fungovanie.

- Prediskutujte príklad slona a mravca na slamke.

Z toho vychádza takzvaný antropický princíp. Forma extra rozmerov určuje formu fyzikálnych zákonov a tie zas určujú, či je možná existencia života. Čo ak je vesmírov veľa, každý má trochu iné fyzikálne zákony a len pár z nich má podmienky vhodné pre život?

Z teórie strún vzišlo veľa ďalších nápadov, napríklad holografický princíp. Je možné, že nás táto cesta povedie k preformulovaniu fundamentálnych zákonov – podobne, ako nás kvantová mechanika prinútila prekopať formalizmus klasickej mechaniky.

12.5.3 Tmavá hmota a energia

Jedným z veľkých otáznikov je tmavá hmota – vyzerá to tak, že tvorí veľkú časť hmoty vesmíru. Vidíme jej gravitačný vplyv, no nevidíme jej priame pôsobenie. Je možné, že sú chybné Einsteinove rovnice a treba modifikovať gravitáciu, možnosť existencie tmavej hmoty však stále považujeme za pomerne pravdepodobnú.

Pre jej existenciu je veľa argumentov – od pozorovania gravitačného šošovkovania, cez vznik galaxií (v simuláciách), rotačné krivky (čo drží galaxie pokope?), pohyb v kopách galaxií (čo drží pokope ich?), či spektrum reliktového žiarenia. Hypotéza tmavej hmoty zabíja veľa múch jednou ranou.

Prvá možnosť, ktorá je z veľkej časti vylúčená, sa označuje MACHOS (Massive compact halo object), čiže malé hmotné astronomické telesá. Druhá možnosť sú WIMPy (Weakly interacting massive particles). Rôzne detektory sa snažia elementárne častice tvoriace tmavú hmotu identifikovať.

Zároveň je vesmír plný tmavej energie, ktorá pri rozpínaní vesmíru neredne, teda aspoň si to myslíme. Javí sa, že to je energia prázdneho priestoru. Vieme, že prázdny priestor nie je úplne prázdny, neustále to v ňom bubloce. Takéto vysvetlenie však dáva nesprávnu hodnotu tmavej energie, rozdiel je desiatky rádov veľký. Skutočnej podstate tmavej energie tak nerozumieme.

12.5.4 Supersymetria

Kľúčovou vlastnosťou teórie superstrún, supergravitácie či mnohých rozšírení štandardného modelu časticovej fyziky sa volá supersymetria.

Supersymetria je model, v ktorom má každá častica svojho superpartnera. Partner sa líši spinom, fermiónom (neceločíselný spin) odpovedajú bozóny (celočíselný spin) a naopak. Výhodou supersymetrických teórií je, že fermióny a bozóny dokážu navzájom vyrušiť svoje príspevky, ktoré dokážu teóriu „kaziť".

Fyzika pozná rôzne spojité symetrie, napríklad rotačnú či translačnú symetriu alebo relativistické Lorentzovské transformácie. Supersymetria je prirodzeným rozšírením týchto symetrií a dokopy tvoria konzistentný celok – to je pre niektorých silnou indíciou.

Problémom však je, že sa nám zatiaľ nepodarilo objaviť supersymetrického partnera ani jednej známej častice.

12.5.5 Kvantové počítače

Jedna zaujímavá novinka, ktorá nás možno čaká, je využitie kvantových počítačov. Bežné počítače operujú s bitmi, teda s jasnými stavmi 1 alebo 0. Kvantové počítače operujú s qubitmi, teda superpozíciou stavov 1 a 0 (napríklad častica so spinom hore a dole).

Výhodou týchto počítačov je, že akoby dokážu prerátať viacero alternatív naraz. Výzvou je však z veľkého počtu výsledok vybrať ten, čo nás zaujíma – tam je rozhodujúce konštruktívna a deštruktívna interferencia.

Druhý problém kvantových počítačov je, že sú náročné na konštrukciu a chod – kvantové stavy musia byť izolované od okolia, meranie – aj nechcené, vo forme interakcie s okolím – krehký kvantový stav dekoheruje.

- Čo je to dekoherencia?

Súčasťou kvantových počítačov je aj takzvaný kvantový teleport. Ide o proces, pri ktorom sa prenesie kvantový stav pomocou série klasických signálov (teda jednotiek a núl). Komunikácia pomocou qubitov ponúka fascinujúcu možnosť ako prenášať informáciu na veľké vzdialenosti, nejde však o presun hmoty.

Kvantová mechanika je, čo do aplikácií, veľmi úspešná teória, v jej teoretických základoch sú nedostatky. Okrem iného nerozumieme procesu merania, ten je nevratný a nemôže tak byť opísaný Schrödingerovou rovnicou. Konvenčná, takzvaná kodanská, interpretácia kvantovej fyziky hovorí, že existuje deliaca čiara medzi klasickou a kvantovou fyzikou, takzvaný Heisenbergov rez. Tento opis je pre mnohých neuspokojivý. Existujú interpretácia kvantovej mechaniky, kde toto delenie neexistuje. Za pozornosť stojí napríklad Everettova kvantová mechanika, ktorá je plne popísaná Schrödingerovou rovnicou, no nutne vedie na existenciu viacerých svetov. Sú aj ďalšie interpretácie, napríklad teória spontánneho kolapsu, superdeterminizmu či pilotnej vlny, každá má však svoje nedostatky. Aj toto myslíme tým, že kvantovej fyzike stále nerozumieme poriadne.

Príklady

- Spočítajte r_1 v Bohrovom modeli atómu.
- Aká je väzbová energia elektrónu v kove, ak ho vykopne zo svojho miesta modrá svetlo a nedokáže to červené?
- Spočítajte frekvenciu svetla vyžiareného pri prechode z prvého excitovaného stavu vodíka do základného. Spočítajte jeho frekvenciu pri rekombinácii (opak ionizácie).
- Zistite, ako dochádza k jadrovej fúzii v Slnku (a budúcich fúznych reaktoroch).
- Zistite, ako dochádza k jadrovému štiepeniu v reaktoroch.
- Nájdite si hodnotu hmotnosti deutária a hélia. Pomocou nich určite väzbovú energiu uvoľnenú pri reakcii $2D \to He$.

- Plutónium-238 môže prejsť alfa premenou. Na začiatku máme Plutónium-238, potom máme He-4 a Urán-234. Pomocou Weizsäckerovej rovnice odhadnite, koľko energie sa uvoľní. Výsledok porovnajte s informáciou z internetu. Párový člen môžete ignorovať.

- Spočítajte, koľko energie vyžaruje Slnko a koľko Zem.

- Ako je definovaná jednotka energie eV? Koľko eV je 1 J?

- Energia potrebná na uvoľnenie elektrónu z kovu je 10 eV. Aká frekvencia svetla odpovedá takejto energii? Aká je rýchlosť uvoľneného elektrónu, ak zasvietime svetlom s dvojnásobnou frekvenciou?

- Zistite, čo sú to: leptóny, mezóny, baryóny, hadróny.

- Vyriešiť stacionárnu Schrödingerovu rovnicu pre časticu na úsečke (ako súvisí s časticou na priamke?).

- Mali sme časticu na úsečke v prvom excitovanom stave (Ψ_2) a prešla do základného stavu (Ψ_1). Fotón akej vlnovej dĺžky vyžiarila? Aká musí byť dĺžka úsečky, aby bol vyžiarený fotón modrý?

- Máme časticu na úsečke v stave $\Psi(x) = 0.25\Psi_1(x) + c\Psi_2(x)$. Určite konštantu c a strednú hodnotu energie častice v tomto stave.

- Mali sme časticu, ktorá bola na začiatku v stave ako v predošlom príklade a nechali sme ju ďalej vyvíjať v čase (podľa Schrödingerovej rovnice). Ako sa po jednej sekunde zmení pravdepodobnosť ju nájsť v prvej polovici úsečky?

- Mám časticu v základnom stave na úsečke a úsečku skrátim na polovicu (pomaly, tak, aby častica zostala v základnom stave). Ako sa zmení jej energia? (Ponaučenie: časticiam sa nepáči, keď ich stláčate. Tento jav stabilizuje niektoré hviezdne objekty a bráni gravitačnému kolapsu.)

- Aký účinok má elektrón, ktoré prejde jeden nanometer za jednu mikrosekundu? Porovnajte s $\hbar$.

- Aký je moment hybnosti Zeme pri pohybe okolo Slnka vyjadrené v násobkoch $\hbar$?

Projekty

- Ako postupne vznikli atómy vo vesmíre?
- Ako funguje jadrový reaktor?
- Zistiť prečo neexistujú zelené hviezdy.
- Ako funguje Schrödingerove riešenie pre atóm vodíka?
- Ako funguje kvantová komunikácia?
- Hocičo z témy fyzika budúcnosti vás zaujalo môžete spracovať ako projekt.

Pár slov na záver

A to je všetko? Však sme len sčítavali a násobili, sem tam derivovali a integrovali. Presne tak. Matematika za fyzikou bežne nie je typicky zložitá, skôr zdĺhavá – treba spraviť veľa jednoduchých krokov. Samozrejme, nie vždy sa všetko dá dopočítať, presné výsledky sú vzácne výnimky. No nás teraz nemuselo trápiť – my sme chceli nakuknúť pod kapotu stroja, ktorý môžeme považovať za jedno z najfenomenálnejších diel ľudstva – fyziku, teóriu, pomocou ktorej rozumieme svetu okolo nás. Snáď vás tento text presvedčil, že matematika nie je na to, aby nám veci komplikovala, ale aby nám umožnila uchopiť javy, ktoré by sme inak uchopiť nedokázali. A naopak, bežné a známe javy nám umožňujú do zázrače fungujúce matematiky získať istý vhľad.